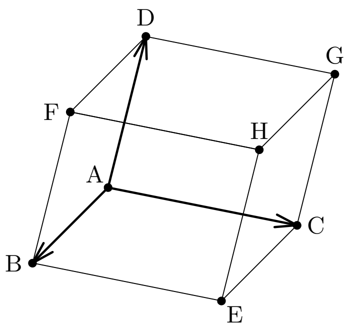
宿題 問題集 数学Ｂ ２章 例題

____ 組 ____ 番　氏名 ____________________

$\boxed{11}$



４点 A(1,−1,−1),B(2,2,3), C(−1,−2,4),D(3,−3,1) がある。線分 AB, AC, AD を３辺とする平行六面体の他の頂点の座標を求めよ。

—解答例—

図のように頂点に名前を付ける。E, F, G, H の座標を求めればよい。

$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AE}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} = (1,-1,-1)+(1,3,4)+(-2,-1,5) = (0,1,8)$,

$\overrightarrow{\mathrm{OF}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AF}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} = (1,-1,-1)+(1,3,4)+(2,-2,2) = (4,0,5)$,

$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AG}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} = (1,-1,-1)+(-2,-1,5)+(2,-2,2) = (1,-4,6)$

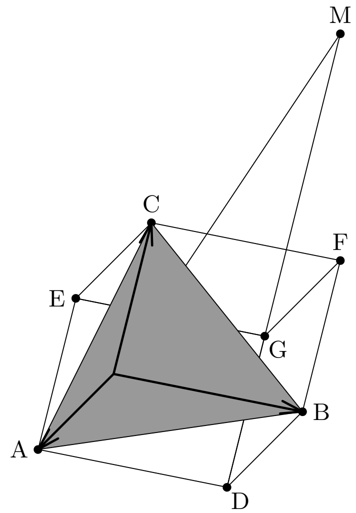
$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AH}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{AC}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}} = (1,-1,-1)+(1,3,4)+(-2,-1,5)+(2,-2,2) = (2,-1,10)$

よって、E(0,1,8), F(4,0,5), G(1,−4,6), H(2,−1,10)

【注意】一般に、位置ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$と終点 P の座標は同じ

Hint：残りは４点。平行四辺形。

$\boxed{12}$



平行六面体 OADB-CEGF において、辺 DG の G を超える延長上に GM=2DG となるように点 M をとり、直線 OM と平面 ABC の交点を P とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とするとき、$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$を$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。

—解答例—

$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\mathrm{OD}} + 3\overrightarrow{\mathrm{DG}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = k\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ とおけるので、$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = k\overrightarrow{\mathrm{OA}} + k\overrightarrow{\mathrm{OB}} + 3k\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

４点 O, A, B, C は同一平面上にないから、P が平面 ABC 上にあるので、$k+k+3k=1$ である。これを解いて、$k=\dfrac{1}{5}$

したがって $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{1}{5}\vec{a} + \dfrac{1}{5}\vec{b} + \dfrac{3}{5}\vec{c}$

【点が平面上にある条件】点 P が３点 A, B, C で決まる平面上にある $\iff$ $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}} + u\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ $(s+t+u=1)$ と書ける。(となる s,t,u が存在する)

$\boxed{13}$ ３点 A(2,0,0), B(0,1,0), C(0,0,−2) が定める平面 α に、原点 O から垂線 OH を下ろす。このとき、H の座標と線分 OH の長さを求めよ。

—解答例—

H は平面 ABC 上にあるので、$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = s(2,0,0)+t(0,1,0)+u(0,0,-2) = (2s,t,-2u)$, $s+t+u=1$ と書ける。OH⊥ 平面 α $\iff$ OH⊥AB かつ OH⊥AC である。

$\overrightarrow{\mathrm{OH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = (2s,t,-2u)\cdot(-2,1,0) = -4s+t = 0$, $\overrightarrow{\mathrm{OH}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = (2s,t,-2u)\cdot(-2,0,-2) = -4s+4u = 0$ よって、$t=4s$, $u=s$ ゆえ $1=s+t+u=s+4s+s=6s$ となり、$s=\dfrac{1}{6}$, $t=\dfrac{2}{3}$, $u=\dfrac{1}{6}$ となる。よって

$\mathrm{H}\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}\right)$, OH=$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|$=$\left|\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{3}\right)\right| = \dfrac{|(1,2,-1)|}{3} = \dfrac{\sqrt{1+4+1}}{3} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$

$\boxed{14}$ 平面 α とその上にない点 A があり、また、α 上に直線 l と l 上にない点 O があるとする。l 上の１点を B とするとき、AO⊥ α, OB⊥ l ⇒AB⊥ l（三垂線の定理）が成り立つことを示せ。

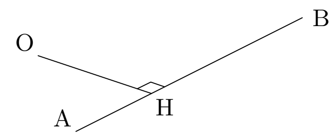
—解答例—

直線 l の方向ベクトルを$\vec{l}$で表す。AO⊥ α で、直線 l は平面上にのっているので、AO⊥ l である。また OB⊥ l である。よって$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\vec{l}$=0, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\vec{l}$=0 である。

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\vec{l} = (\overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot\vec{l} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\vec{l} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\vec{l} = 0$ ∴AB⊥ l

【直線 l が平面に垂直であること】定義は、平面上にある全ての直線 ⊥ l であるが、実際には、平面上にある交わる２直線と垂直なら良い。

$\boxed{15}$



原点 O から、２点 A(5,−2,−3),B(8,0,−4) を通る直線に垂線 OH を下ろす。このとき、点 H の座標と線分 OH の長さを求めよ。

—解答例—

H は直線 AB 上にあるので、$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}} = (1-t)(5,-2,-3)+t(8,0,-4) = (5+3t,-2+2t,-3-t)$

これが $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (3,2,-1)$ と直交するので、

$0 = (5+3t,-2+2t,-3-t)\cdot(3,2,-1) = 15+9t-4+4t+3+t = 14t+14$

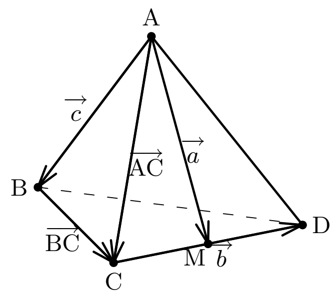
これを解いて $t=-1$ ゆえ、H(2,−4,−2), OH=$|(2,-4,-2)| = 2|(1,-2,-1)| = 2\sqrt{1+4+1} = 2\sqrt{6}$

【直線上の点を表す】$\mathrm{A}(\vec{a})$, $\mathrm{B}(\vec{b})$ を通る直線上の点を $\mathrm{P}(\vec{p})$ とすると、$\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b}$ $(s+t=1)$ と書ける。

宿題 教科書 数学B 2章節末 空間のベクトル No1

____ 組 ____ 番 氏名 ____________________

$\boxed{1}$



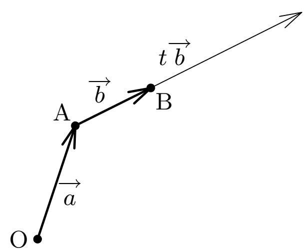
四面体 ABCD において、辺 CD の中点を M とする。$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{c}$ とするとき、$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて表せ。

—解答例—

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AM}}-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{c}-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}=-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\vec{c}$$

$\boxed{2}$



$\vec{a}=(1,3,-2)$, $\vec{b}=(1,-2,0)$ と実数 t に対し、次の問に答えよ。

(1) $|\vec{a}+t\vec{b}|^2$ を t の式で表せ。

(2) $|\vec{a}+t\vec{b}|$ の最小値を求めよ。

—解答例—

$$|\vec{a}+t\vec{b}|^2=|(1,3,-2)+t(1,-2,0)|^2=|(1+t,3-2t,-2)|^2$$
$$=(1+t)^2+(3-2t)^2+(-2)^2=(1+2t+t^2)+(9-12t+4t^2)+(4)$$
$$=5t^2-10t+14=5(t-1)^2+9$$

$\therefore |\vec{a}+t\vec{b}|^2=\sqrt{5(t-1)^2+9}\geqq 3$

$t=1$ のとき、最小値 3

【方針】成分で与えられたベクトルは、成分で計算する。

$\boxed{3}$ ベクトル $\vec{a}=(2,0,2)$, $\vec{b}=(1,2,3)$ がある。

(1) ベクトル $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$ は $\vec{a}$ に垂直であることを示せ。

(2) $\vec{b}$ と $\vec{c}$ の両方に垂直で、大きさが 3 であるベクトル $\vec{d}$ を求めよ。

—解答例—

$\vec{c}=(2,0,2)-(1,2,3)=(1,-2,-1)$ ゆえ、$\vec{a}\cdot\vec{c}=(2,0,2)\cdot(1,-2,-1)=2-2=0$ となり、$\vec{c}\perp\vec{a}$ である。

$\vec{d}=(x,y,z)$ とおくと、$0=\vec{b}\cdot\vec{d}=(1,2,3)\cdot(x,y,z)=x+2y+3z\cdots①$, $0=\vec{c}\cdot\vec{d}=(1,-2,-1)\cdot(x,y,z)=x-2y-z\cdots②$, $x^2+y^2+z^2=9\cdots③$ である。

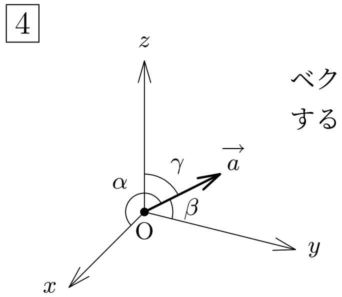
① − ② から $4y+4z=0$, ① + ② から $2x+2z=0$ ゆえ、$x=-z, y=-z$

③から $9=x^2+y^2+z^2=z^2+z^2+z^2$ ゆえ $z=\pm\sqrt{3}$

$\therefore \vec{d}=\pm(\sqrt{3},\sqrt{3},-\sqrt{3})$

【未知ベクトルを求める】成分で与えられているなら、未知数を使って、(x,y,z) とおく。

$\boxed{4}$



ベクトル $\vec{a}=(1,2,2)$ が x 軸, y 軸, z 軸の正の向きとなす角を、それぞれ, α, β, γ とするとき、$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ の値を求めよ。

—解答例—

$$\cos\alpha=\frac{(1,2,2)\cdot(1,0,0)}{|(1,2,2)||(1,0,0)|}=\frac{1+0+0}{\sqrt{1+4+4}}=\frac{1}{3}$$

$$\cos\beta=\frac{(1,2,2)\cdot(0,1,0)}{|(1,2,2)||(0,1,0)|}=\frac{0+2+0}{\sqrt{1+4+4}}=\frac{2}{3}$$

$$\cos\gamma=\frac{(1,2,2)\cdot(0,0,1)}{|(1,2,2)||(0,0,1)|}=\frac{0+0+2}{\sqrt{1+4+4}}=\frac{2}{3}$$

【事実】この $\cos\alpha$ などを方向余弦という。

【角】内積を計算する。相手のベクトルが見えないが、軸方向のベクトルだから、(1,0,0) などを使えばよい。

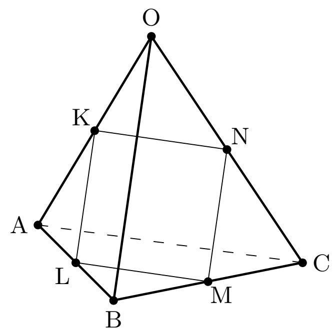
Hint : x 軸の正の向きを表すベクトルは $(1,0,0)$

宿題 教科書 数学B 2章節末 空間のベクトル No2

____組____番　氏名________________

$\boxed{5}$

四面体 OABC の辺 OA,AB, BC, OC の中点を、それぞれ K, L, M, N とすると、四角形 KLMN は平行四辺形であることを示せ。



—解答例—

A($\vec{a}$), B($\vec{b}$), C($\vec{c}$) , K($\vec{k}$), L($\vec{l}$), M($\vec{m}$), N($\vec{n}$) とおく。

$\vec{k}=\dfrac{\vec{a}}{2}$, $\vec{l} = \dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$, $\vec{m}=\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$, $\vec{n} = \dfrac{\vec{c}}{2}$ である。

よって $\overrightarrow{\mathrm{KL}} = \vec{l} - \vec{k} = \dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2} - \dfrac{\vec{a}}{2} = \dfrac{\vec{b}}{2}$,

$\overrightarrow{\mathrm{NM}} = \vec{m} - \vec{n} = \dfrac{\vec{b}+\vec{c}-c}{2} = \dfrac{\vec{b}}{2}$

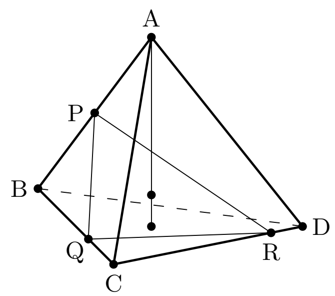
よって $\overrightarrow{\mathrm{KL}} = \overrightarrow{\mathrm{NM}}$ となり、四角形 KLMN は平行四辺形である。

【注意】計算した結果が、簡単になったが、これは、$\boxed{}$ からすぐに分かることであった。

Hint：$\overrightarrow{\mathrm{KL}}$=$\overrightarrow{\mathrm{NM}}$を示す。位置ベクトルを使う。

$\boxed{6}$

四面体 ABCD の３辺 AB, BC, CD 上に、それぞれ点 P,Q,R がある。AP=PB, BQ=2QC, CR=5RD ならば、頂点 A と $\triangle BCD$, $\triangle PQR$ の重心は一直線上にあることとを示せ。



—解答例—

A($\vec{a}$), B($\vec{b}$), C($\vec{c}$) , D($\vec{d}$), P($\vec{p}$), Q($\vec{q}$), R($\vec{r}$) とおく。

$\vec{p}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$, $\vec{q} = \dfrac{\vec{b}+2\vec{c}}{3}$, $\vec{r}=\dfrac{\vec{c}+5\vec{d}}{6}$ である。

$\triangle BCD$, $\triangle PQR$ の重心をそれぞれ G($\vec{g}$), H($\vec{h}$) で表すと $\vec{g} = \dfrac{\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{3}$,

$\vec{h} = \dfrac{\vec{p}+\vec{q}+\vec{r}}{3} = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{(3\vec{a}+3\vec{b})+(2\vec{b}+4\vec{c})+(\vec{c}+5\vec{d})}{6} = \dfrac{3\vec{a}+5\vec{b}+5\vec{c}+5\vec{d}}{18}$

よって $\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \vec{g} - \vec{a} = \dfrac{-3\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}}{3}$, $\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \vec{h} - \vec{a} = \dfrac{-15\vec{a}+5\vec{b}+5\vec{c}+5\vec{d}}{18}$

$\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \dfrac{5}{6}\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ となるので、３点 A, G, H は一直線上にある。

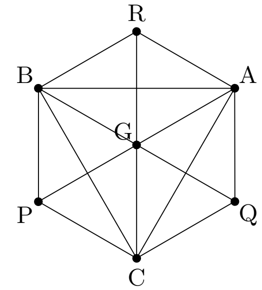
Hint：$\vec{b} = k\vec{a}$ と書けるか。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$で表す。

$\boxed{7}$ ３点 A(1,2,−1), B(3,4,−1), C(3,2,1) がある。

(1) $\triangle ABC$ は正三角形であることを証明せよ。

(2) $\triangle ABC$ の重心 G の座標を求めよ。

(3) 正六角形 ARBPCQ を作るとき、その頂点 P, Q, R の座標を求めよ。



—解答例—

$AB = \sqrt{(3-1)^2+(4-2)^2+(-1+1)^2} = \sqrt{8}$,
$BC = \sqrt{(3-3)^2+(2-4)^2+(1+1)^2} = \sqrt{8}$,
$CA = \sqrt{(1-3)^2+(2-2)^2+(-1-1)^2} = \sqrt{8}$ ゆえ $\triangle ABC$ は正三角形である。

$G\left(\dfrac{1+3+3}{3}, \dfrac{2+4+2}{3}, \dfrac{-1-1+1}{3}\right)$ ゆえ $G\left(\dfrac{7}{3}, \dfrac{8}{3}, \dfrac{-1}{3}\right)$

図より、線分 AP の中心が G なので、P(x, y, z) とおくと、$\left(\dfrac{1+x}{2}, \dfrac{2+y}{2}, \dfrac{-1+z}{2}\right) = \left(\dfrac{7}{3}, \dfrac{8}{3}, \dfrac{-1}{3}\right)$

ゆえ P$\left(\dfrac{11}{3}, \dfrac{10}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$, 同様に Q$\left(\dfrac{5}{3}, \dfrac{4}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$, R$\left(\dfrac{5}{3}, \dfrac{10}{3}, \dfrac{-5}{3}\right)$

Hint (3)：PQR は三角形 ABC から見ると、どんな点か？

$\boxed{8}$ 次の球面の方程式を求めよ。

(1) 点 A(1,−2,3) を中心とし、点 B(3,1,0) 通る球面

(2) ２点 A(2,0,3), B(−2,4,1) を直径の両端とする球面

(3) 点 (2,1,1) を通り、３つの座標平面に接する球面

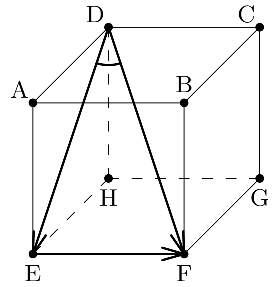
—解答例—

(1) 半径は $AB = \sqrt{(3-1)^2+(1+2)^2+(0-3)^2} = \sqrt{22}$ ゆえ、$(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2 = 22$

(2) AB の中点 (0,2,2) が中心で、直径が $AB = \sqrt{(-2-2)^2+(4-0)^2+(1-3)^2} = 6$ の円ゆえ、
$x^2+(y-2)^2+(z-2)^2 = 9$

(3) (2,1,1) を通り、座標平面に接することから、中心が (r, r, r), 半径 $r > 0$ と書けるので、$(x-r)^2+(y-r)^2+(z-r)^2 = r^2$ となる。これが、(2,1,1) を通るので、$(2-r)^2+(1-r)^2+(1-r)^2 = r^2$ となる。整理して $r^2-4r+3 = (r-1)(r-3) = 0$ ゆえ、$r = 1, 3$.
よって、求める球面の方程式は $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2 = 1$, $(x-3)^2+(y-3)^2+(z-3)^2 = 9$

$\boxed{1}$



辺の長さが 1 の立方体 ABCD-EFGH がある。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{DF}} = \overrightarrow{\mathrm{DE}} + \overrightarrow{\mathrm{EF}}$ であることを利用して、内積$\overrightarrow{\mathrm{DE}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{DF}}$を求めよ。

(2) $\cos\angle$EDF の値を求めよ。

—解答例—

$\overrightarrow{\mathrm{DE}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{DF}} = \overrightarrow{\mathrm{DE}} \cdot (\overrightarrow{\mathrm{DE}} + \overrightarrow{\mathrm{EF}}) = \overrightarrow{\mathrm{DE}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{DE}} + \overrightarrow{\mathrm{DE}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{EF}} = (\sqrt{2})^2 + 0 = 2$

$$\cos\angle\mathrm{EDF} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{DE}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{DF}}}{|\overrightarrow{\mathrm{DE}}||\overrightarrow{\mathrm{DF}}|} = \frac{2}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$\boxed{2}$ 3 点 A(0,1,1), B(−1,−1,2), C(2,3,1) を頂点とする $\triangle ABC$ について、次のものを求めよ。

(1) $\angle$BAC の大きさ

(2) $\triangle ABC$ の面積

—解答例—

$$\cos\angle\mathrm{BAC} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|} = \frac{(-1,-2,1)\cdot(2,2,0)}{|(-1,-2,1)||(2,2,0)|} = \frac{-2-4}{\sqrt{1+4+1}\sqrt{4+4}} = \frac{-6}{\sqrt{6}\sqrt{8}} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$0^\circ < \angle$BAC $< 180^\circ$ ゆえ、$\angle$BAC $=150^\circ$

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin\angle\mathrm{BAC}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(-1-0)^2+(-1-1)^2+(2-1)^2}\sqrt{(2-0)^2+(3-1)^2+(1-1)^2}\sqrt{1-\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{6}\sqrt{8}\frac{1}{2} = \sqrt{3}$$

$\boxed{3}$ 球面 $(x-5)^2+(y-4)^2+(z+2)^2=16$ が平面 $z=1$ と交わって出来る図形の方程式を求めよ。

—解答例—

求める方程式は、$\begin{cases} (x-5)^2+(y-4)^2+(z+2)^2=16 \\ z=1 \end{cases}$ から $\begin{cases} (x-5)^2+(y-4)^2=7 \\ z=1 \end{cases}$

$\boxed{4}$ 4 点 A(8,2,−3), B(1,3,2), C(5,1,8), D(3,−3,6) を頂点とする四面体 ABCD がある。

(1) 辺 CD の中点を M とするとき、BM$\perp$CD であることを示せ。

(2) $\triangle BCD$ の面積を求めよ。

(3) AB$\perp$BC, AB$\perp$BD であることを示せ。

(4) 四面体 ABCD の体積を求めよ。

—解答例—

(1) M(4,−1,7) から $\overrightarrow{\mathrm{BM}} = (4,-1,7)-(1,3,2) = (3,-4,5)$, $\overrightarrow{\mathrm{CD}} = (3,-3,6)-(5,1,8) = (-2,-4,-2)$ ゆえ、$\overrightarrow{\mathrm{BM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}} = (3,-4,5)\cdot(-2,-4,-2) = -6+16-10 = 0$ よって BM$\perp$CD である。

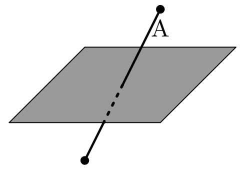
(2) $\triangle BCD = \frac{1}{2} CD \cdot BM = \frac{1}{2}\sqrt{4+16+4}\sqrt{9+16+25} = 10\sqrt{3}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (-7,1,5)$, $\overrightarrow{\mathrm{BC}} = (4,-2,6)$, $\overrightarrow{\mathrm{BD}} = (2,-6,4)$ ゆえ $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BC}} = -28-2+30 = 0$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BD}} = -14-6+20 = 0$ なので、AB$\perp$BC, AB$\perp$BD が成り立つ。

(4) 四面体 ABCD$= \frac{1}{3} AB \cdot \triangle BCD = \frac{1}{3}\sqrt{49+1+25}\cdot 10\sqrt{3} = 50$

$\boxed{5}$

２点 A(-1,-5,5), B(2,1,2) と xy 平面上の点 P が一直線上にあるとき、点 P の座標を求めよ。



—解答例—

P は直線 AB 上の点ゆえ、P(x,y,z) とおくと、

$(x,y,z)=(1-t)(-1,-5,5)+t(2,1,2)=(-1+3t,-5+6t,5-3t)$

P は xy 平面上の点ゆえ $z=5-3t=0$ を解いて、$t=\dfrac{5}{3}$ である。

$(-1+3t,-5+6t,5-3t)=(4,5,0)$

これが P の座標である。

$\boxed{6}$ ３点 A(2,0,0), B(0,1,0), C(0,0,2) の定める平面を α とし、原点 O から平面 α に垂線 OH を下ろす。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=r\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおくと、$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ から $4r-s=0$, $r-t=0$ であることを導け。

(2) 点 H の座標を求めよ。

(3) 垂線 OH の長さを求めよ。

—解答例—

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=r(2,0,0)+s(0,1,0)+t(0,0,2)=(2r,s,2t)$ ゆえ $\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(2r,s,2t)\cdot(-2,1,0)=-4r+s=0$,
$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(2r,s,2t)\cdot(-2,0,2)=-4r+4t=0$ $\therefore 4r-s=r-t=0$

(2) $\begin{cases} 4r-s=0 & \cdots① \\ r-t=0 & \cdots② \\ r+s+t=0 & \cdots③ \end{cases}$ $s=4r$, $t=r$ を③に代入して、$r+4r+r=1$ ゆえ $r=\dfrac{1}{6}$

これから H$\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3}\right)$

(3) $OH=|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|=\dfrac{|(1,2,1)|}{3}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

Hint (2) : H が平面 α(=ABC) 上にあるから、$r+s+t=1$, (3) : OH=$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|$

宿題 4step 数学 B ベクトルの応用 No1 共線条件　　　　＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{71}$ $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=-2\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=4\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=2\vec{a}+4\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=6\vec{a}+2\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OE}}=-2\vec{a}-6\vec{b}$ であるとき、次のことを証明せよ。ただし、$\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$, $\vec{a}\not\parallel\vec{b}$ とする。

(1) 3点 O,A,B は一直線上にある。　(2) $AC \parallel BD$　(3) 3点 B,D,E は一直線上にある。

(1) Hint：$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$,$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$　(2) Hint：$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$,$\overrightarrow{\mathrm{BD}}$　(3) Hint：$\overrightarrow{\mathrm{BD}}$,$\overrightarrow{\mathrm{BE}}$

$\boxed{72}$ $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=3\vec{a}-2\vec{b}$ であるとき、点 P は直線 AB 上にあることを証明せよ。

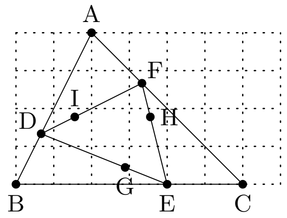
Hint：$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$,$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

$\boxed{73}$ 3点 $(1,x)$,$(x,0)$,$(-1,6)$ が一直線上にあるように x の値を求めよ。

Hint：3点をそれぞれ A,B,C とおくとき、$\overrightarrow{\mathrm{CA}} \parallel \overrightarrow{\mathrm{CB}}$

$\boxed{75}$ $\triangle ABC$ の辺 AB,BC,CA を 2：1 に内分する点を、それぞれ D,E,F とする。さらに $\triangle DEF$ の辺 DE,EF,FD を 2：1 に内分する点を、それぞれ G,H,I とする。このとき、GH $\parallel$ AB であることを示せ。

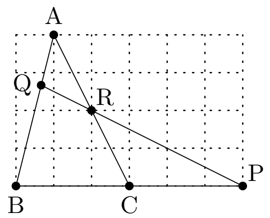
—解答例—



Hint：A($\vec{a}$), B($\vec{b}$),C($\vec{c}$) などとし、分点の位置ベクトルを求め、$\overrightarrow{\mathrm{GH}}$,$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$を調べる。

$\boxed{76}$ $\triangle ABC$ において、辺 BC を 2：1 に外分する点を P, 辺 AB を 1：2 に内分する点を Q, 辺 CA の中点を R とするとき、3点 P,Q,R は一直線上にあることを証明し、RQ：QP を求めよ。

—解答例—

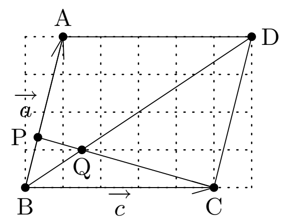


Hint：$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$ で$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$,$\overrightarrow{\mathrm{AR}}$,$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$を表す。

$\boxed{77}$ 平行四辺形 ABCD において、辺 AB を 2：1 に内分する点を P, 対角線 BD を 1：3 に内分する点を Q とする。また、$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{c}$ とする。

(1) 3点 P,Q,C は一直線上にあることを証明せよ。　(2) PQ：QC を求めよ。

—解答例—



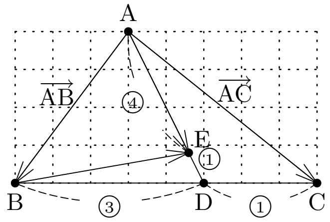
(1) $\overrightarrow{\mathrm{CP}}$,$\overrightarrow{\mathrm{CQ}}$　(2) $\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\boxed{}\overrightarrow{\mathrm{CQ}}$ の係数から CP：CQ が分かる。

宿題 教科書 数学 B 第 2 章 第 2 節節末 (p45)No1

_____ 組 _____ 番　氏名 ________________________

$\boxed{7}$ $\triangle ABC$ において、辺 BC を 3 : 1 に内分する点を D とし、線分 AD を 4 : 1 に内分する点を E とする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$と$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$を用いて$\overrightarrow{\mathrm{AE}}$,$\overrightarrow{\mathrm{BE}}$を表せ。

—解答例—

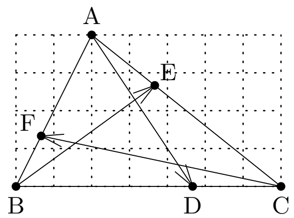


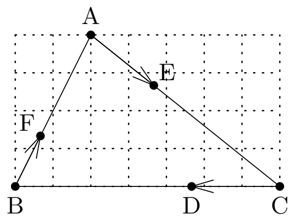
Hint : BC を 3 : 1 に内分するから、$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$を$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$で表す。

$\boxed{8}$ $\triangle ABC$ において、辺 BC,CA,AB を m : n に内分する点を、それぞれ D,E,F とするとき、次の等式が成り立つことを証明せよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{BE}}+\overrightarrow{\mathrm{CF}}=\overrightarrow{0}$　　(2) $\overrightarrow{\mathrm{AE}}+\overrightarrow{\mathrm{BF}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\overrightarrow{0}$

—解答例—

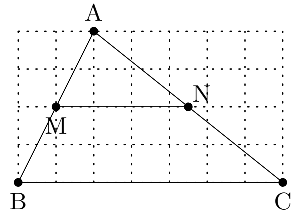




Hint : A を中心とする位置ベクトル A($\overrightarrow{0}$), B($\overrightarrow{b}$), C($\overrightarrow{c}$) を考え、D,E,F の位置ベクトルを$\overrightarrow{b}$,$\overrightarrow{c}$で表す。

$\boxed{9}$ $\triangle ABC$ において、2 辺 AB,AC の中点を、それぞれ M,N とするとき、MN // BC かつ 2MN=BC であることを証明せよ。

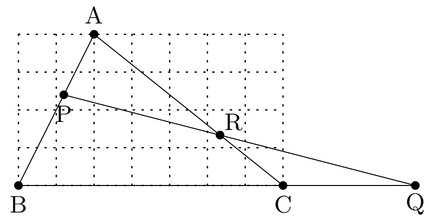
—解答例—



Hint : A を中心とする位置ベクトルで A,B,C を表しておき、$\overrightarrow{\mathrm{MN}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ を$\overrightarrow{b}$,$\overrightarrow{c}$で表す。

$\boxed{10}$ $\triangle ABC$ において、辺 AB を 2 : 3 に内分する点を P, 辺 BC を 3 : 1 に外分する点を Q, 辺 CA を 1 : 2 に内分する点を R とするとき、3 点 P,R,Q は一直線上にあることを証明せよ。また、PR : RQ を求めよ。

—解答例—



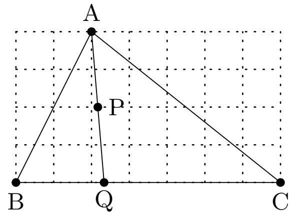
Hint : A を中心とする位置ベクトルで A,B,C を表しておき、P,Q,R の位置ベクトルを$\overrightarrow{b}$,$\overrightarrow{c}$で表し、$\overrightarrow{\mathrm{PR}}$,$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$を比べる。

$\boxed{11}$ $\triangle ABC$ と点 P があり、等式 $3\overrightarrow{\mathrm{AP}}+2\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\vec{0}$ が成り立っているとき、次のことを示せ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$, $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\vec{p}$ とすると、$\vec{p}=\dfrac{2\vec{b}+\vec{c}}{6}$ である。

(2) 辺 BC を 1 : 2 に内分する点を Q とすると、点 P は線分 AQ の中点である。

—解答例—



Hint (2) : $\vec{p}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ か？

$\boxed{12}$ 直角三角形 OAB の 3 辺の長さを AB=1,OA=$\sqrt{3}$,OB=$\sqrt{2}$ とし、∠AOB の大きさを θ とする。また、$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$,$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とする。

(1) $\cos\theta$ の値を求めよ。

(2) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

(3) $|\vec{b}+t\vec{a}|$ を最小にする実数 t の値とその最小値を求めよ。

Hint : $|\vec{b}+t\vec{a}|^2$ は t の 2 次関数

$\boxed{13}$ 四角形 ABCD において、辺 AB,BC,CD,DA の中点を、それぞれ E,F,G,H とし、対角線 AC,BD の中点を、それぞれ I， J とする。このとき、線分 EG,FH,IJ は 1 点で交わることを証明せよ。

Hint : A,B,C,D の位置ベクトルを決めておき、EG, FH, IJ の中点を調べよう。

$\boxed{14}$ $\triangle OAB$ に対し、$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とする。実数 s,t が次の各条件を満たしながら動くとき、点 P の存在範囲を求めよ。

(1) $0\leqq s\leqq 1, 0\leqq t\leqq 1$

(2) $s+2t=1, s\geqq 0, t\geqq 0$

(1) Hint : s,t が独立に動く。

(2) Hint : $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2t\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$