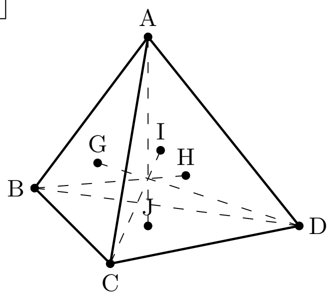
小テスト (p63 応例 1：位置ベクトル)　　＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

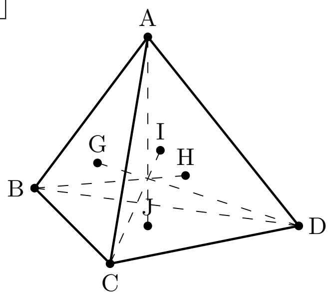
$\boxed{1}$



４点 A($\overrightarrow{a}$),B($\overrightarrow{b}$),C($\overrightarrow{c}$),D($\overrightarrow{d}$) を頂点とする四面体において、$\triangle ABC$, $\triangle ACD$, $\triangle ADB$, $\triangle BCD$ の重心をそれぞれ G, H, I, J とおく。このとき、線分 DG, BH, CI, AJ をそれぞれ 3：1 に内分する点は一致することを証明せよ。

小テスト (p63 応例 1：位置ベクトル)　　＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1



４点 A($\overrightarrow{a}$),B($\overrightarrow{b}$),C($\overrightarrow{c}$),D($\overrightarrow{d}$) を頂点とする四面体において、$\triangle ABC$，$\triangle ACD$，$\triangle ADB$，$\triangle BCD$ の重心をそれぞれ G, H, I, J とおく。このとき、線分 DG, BH, CI, AJ をそれぞれ 3：1 に内分する点は一致することを証明せよ。

—解答例—

G($\overrightarrow{g}$), H($\overrightarrow{h}$), I($\overrightarrow{i}$), J($\overrightarrow{j}$) とおくと、

$\overrightarrow{g} = \dfrac{\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}}{3}$, $\overrightarrow{h} = \dfrac{\overrightarrow{a} + \overrightarrow{c} + \overrightarrow{d}}{3}$, $\overrightarrow{i} = \dfrac{\overrightarrow{a} + \overrightarrow{d} + \overrightarrow{b}}{3}$, $\overrightarrow{j} = \dfrac{\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} + \overrightarrow{d}}{3}$ である。

このとき、線分 DG, BH, CI, AJ をそれぞれ 3：1 に内分する点の位置ベクトルはそれぞれ

$$\frac{\overrightarrow{d} + 3\overrightarrow{g}}{3+1} = \frac{\overrightarrow{d} + \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}}{4},$$

$$\frac{\overrightarrow{b} + 3\overrightarrow{h}}{3+1} = \frac{\overrightarrow{c} + \overrightarrow{a} + \overrightarrow{c} + \overrightarrow{d}}{4},$$

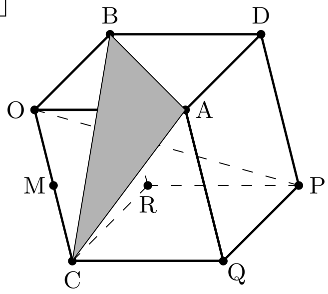
$$\frac{\overrightarrow{c} + 3\overrightarrow{i}}{3+1} = \frac{\overrightarrow{c} + \overrightarrow{a} + \overrightarrow{d} + \overrightarrow{b}}{4},$$

$$\frac{\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{j}}{3+1} = \frac{\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} + \overrightarrow{d}}{4}$$

となって一致するので、線分 DG, BH, CI, AJ をそれぞれ 3：1 に内分する点は一致する。

小テスト (p64 応例 2：一直線上の３点)　　＿＿＿ 組 ＿＿＿ 番　氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

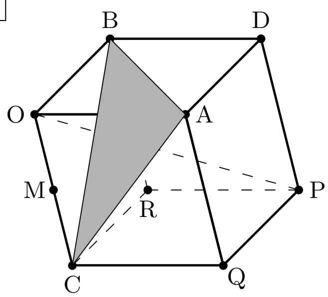
$\boxed{2}$



OA, OB, OC を 3 つの辺とする平行六面体 OADB-CQPR において、$\triangle ABC$ の重心を G とする。さらに、辺 OC の中心を M とする。3 点 D,G,M は一直線上にあることを証明せよ。また、DG : GM を求めよ。

小テスト (p64 応例 2：一直線上の３点)　　＿＿ 組 ＿＿ 番　氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{2}$



OA, OB, OC を３つの辺とする平行六面体 OADB-CQPR において、$\triangle ABC$ の重心を G とする。さらに、辺 OC の中心を M とする。３点 D,G,M は一直線上にあることを証明せよ。また、DG : GM を求めよ。

—解答例—

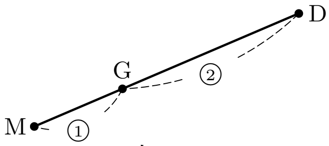
$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおく。

$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{1}{2}\vec{c}$, $\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$, $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{a}+\vec{b}$ ゆえ

$$\overrightarrow{\mathrm{DG}}=\overrightarrow{\mathrm{OG}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}-(\vec{a}+\vec{b})=\frac{-2\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{GM}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{1}{2}\vec{c}-\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}=\frac{-2\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}}{6}$$

$\therefore 2\overrightarrow{\mathrm{GM}}=\overrightarrow{\mathrm{DG}}$

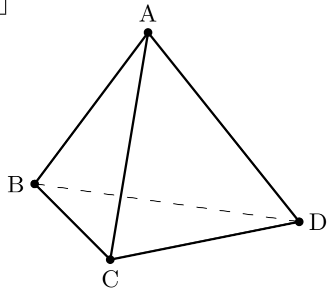


よって、３点 D, G, M は一直線上にある。また、DG : GM = 2 : 1

小テスト (p65 応例 3：内積の利用)

＿＿＿ 組 ＿＿＿ 番　氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

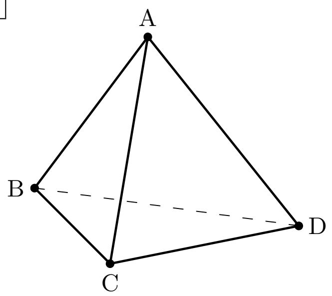
$\boxed{3}$



四面体 ABCD において、$AB \perp CD$, $AC \perp BD$ ならば $AD \perp BC$ が成り立つことを証明せよ。

小テスト (p65 応例 3：内積の利用)　　　＿＿＿ 組 ＿＿＿ 番　氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{3}$



四面体 ABCD において、AB⊥CD, AC⊥BD ならば AD⊥BC が成り立つことを証明せよ。

—解答例—

AB⊥CD より $0 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

$\therefore \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdots$ ①

AC⊥BD より $0 = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$

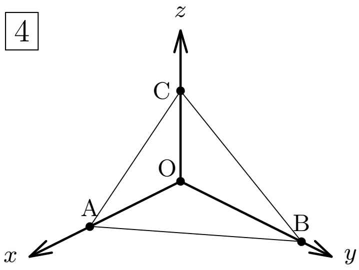
$\therefore \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} \cdots$ ②

よって $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ ($\because$ ①, ②から$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$)

したがって、AD⊥BC となる。

小テスト **(p65 例題 4：同じ平面上にある点)**　　＿＿＿組＿＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

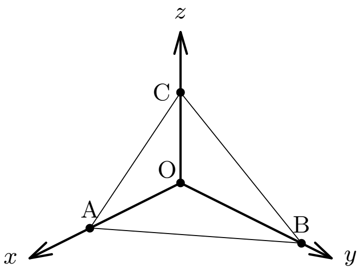
$\boxed{4}$



３点 A(2,0,0), B(0,4,0), C(0,0,3) の定める平面 α 上に点 P(1,y,−3) があるとき、y の値を求めよ。

小テスト (p65 例題 4:同じ平面上にある点)　　＿＿＿組＿＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{4}$



３点 A(2,0,0), B(0,4,0), C(0,0,3) の定める平面 α 上に点 P(1,y,−3) があるとき、y の値を求めよ。

—解答例—

４点 O, A, B, C は同一平面上にないから、

$(1, y, -3) = s(2, 0, 0) + t(0, 4, 0) + u(0, 0, 3)$ $s + t + u = 1$ と書ける。

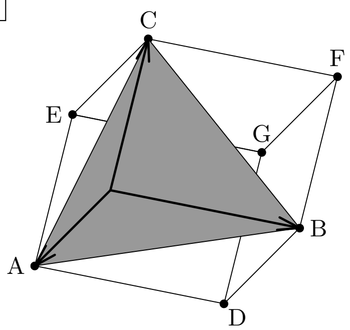
成分を比べて、$\begin{cases} 1 & = 2s \\ y & = 4t \\ -3 & = 3u \\ s+t+u & = 1 \end{cases}$

よって $\dfrac{1}{2} + \dfrac{y}{4} - 1 = 1$ ゆえ、$y = 6$

小テスト (p67 応例 4：平面と直線の交点)

_____ 組 _____ 番　氏名 __________________________

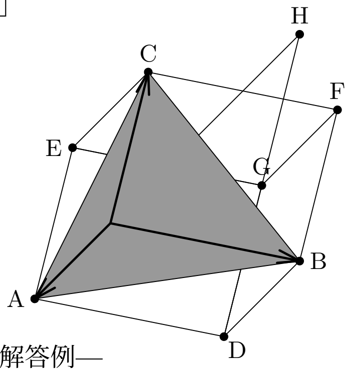
$\boxed{5}$



平行六面体 OADB-CEGF において、辺 DG の G を超える延長上に DG=GH となるように点 H をとり、直線 OH と平面 ABC の交点を L とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{c}$ とするとき、$\overrightarrow{\mathrm{OL}}$を $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ を用いて表せ。また、OL : LH を求めよ。

小テスト (p67 応例 4：平面と直線の交点)　　＿＿ 組 ＿＿ 番　氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{5}$



平行六面体 OADB-CEGF において、辺 DG の G を超える延長上に DG=GH となるように点 H をとり、直線 OH と平面 ABC の交点を L とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とするとき、$\overrightarrow{\mathrm{OL}}$を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。また、OL : LH を求めよ。

—解答例—

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{CH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+2\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}$

L は直線 OH 上にあるので、$\overrightarrow{\mathrm{OL}}=k\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ と書ける。

よって $\overrightarrow{\mathrm{OL}}=k\vec{a}+k\vec{b}+2k\vec{c}$ となる。

４点 O,A,B,C は同一平面上になく、点 L は平面 ABC 上にあるので、

$k+k+2k=1$ である。これから $k=\dfrac{1}{4}$

したがって、$\overrightarrow{\mathrm{OL}}=\dfrac{1}{4}\vec{a}+\dfrac{1}{4}\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{c}$

また、$\overrightarrow{\mathrm{OL}}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ ゆえ $OL=\dfrac{1}{4}OH$ となり、OL : OH $=1:4$ ゆえ OL : LH $=1:3$

【注意】OL=$\dfrac{1}{4}$OH から $\dfrac{OL}{OH}=\dfrac{1}{4}$ と見ると OL : OH $=1:4$ が分かり易い