

小テスト (p150 例題 1: 不定積分の計算)

_____組 _____番 氏名 _____

1 関数 $(3x - 1)(2x + 1)$ を積分せよ。

1 関数 $(3x - 1)(2x + 1)$ を積分せよ。

—解答例—

$$\int (3x - 1)(2x + 1) dx = \int (6x^2 + x - 1) dx = 2x^3 + \frac{x^2}{2} - x + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

2 次の定積分を計算せよ。

(1) $\int_2^3 (x^2 + 3x - 1) dx$

(2) $\int_1^2 (t - 1)(t - 2) dt$

2 次の定積分を計算せよ。

$$(1) \int_2^3 (x^2 + 3x - 1) dx$$

—解答例—

$$\begin{aligned} \int_2^3 (x^2 + 3x - 1) dx &= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - x \right]_2^3 \\ &= \left(9 + \frac{27}{2} - 3 \right) - \left(\frac{8}{3} + 6 - 2 \right) = 19 + \frac{1}{2} - 6 - \frac{2}{3} = 13 - \frac{1}{6} = \frac{77}{6} \end{aligned}$$

$$(2) \int_1^2 (t-1)(t-2) dt$$

—解答例—

$$\begin{aligned} \int_1^2 (t-1)(t-2) dt &= \int_1^2 (t^2 - 3t + 2) dt = \left[\frac{t^3}{3} - \frac{3t^2}{2} + 2t \right]_1^2 \\ &= \left(\frac{8}{3} - 6 + 4 \right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{3}{2} + 2 \right) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

小テスト (p157 例題 4: 絶対値の積分)

_____ 組 _____ 番 氏名 _____

3, 定積分 $\int_{-1}^2 |x| dx$ の値を求めよ。

3, 定積分 $\int_{-1}^2 |x| dx$ の値を求めよ。

—解答例—

$$|x| = \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ -x & (x \leq 0) \end{cases} \text{ ゆえ}$$

$$\begin{aligned} \text{与式} &= \int_{-1}^0 |x| dx + \int_0^2 |x| dx = \int_{-1}^0 (-x) dx + \int_0^2 x dx \\ &= \left[-\frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 + \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^2 = (0) - \left(-\frac{1}{2} \right) + (2) - (0) = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

小テスト (p157 例題 4: 絶対値の積分)

_____ 組 _____ 番 氏名 _____

3 定積分 $\int_0^4 |x(x-3)| dx$ の値を求めよ。

3 定積分 $\int_0^4 |x(x-3)|dx$ の値を求めよ。

—解答例—

$$\begin{aligned}\int_0^4 |x(x-3)|dx &= \int_0^3 |x(x-3)|dx + \int_3^4 |x(x-3)|dx \\ &= -\int_0^3 x(x-3)dx + \int_3^4 x(x-3)dx \\ &= -\int_0^3 (x^2 - 3x)dx + \int_3^4 (x^2 - 3x)dx \\ &= -\left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}\right]_0^3 + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}\right]_3^4 \\ &= -\left(9 - \frac{27}{2}\right) + (0) + \left(\frac{64}{3} - 24\right) - \left(9 - \frac{27}{2}\right) = -18 + 27 + 21 + \frac{1}{3} - 24 = \frac{19}{3}\end{aligned}$$

4 等式 $\int_a^x f(t)dt = 3x^2 - 10x + 3$ を満たす関数 $f(x)$ と定数 a の値を求めよ。

4 等式 $\int_a^x f(t)dt = 3x^2 - 10x + 3$ を満たす関数 $f(x)$ と定数 a の値を求めよ。

—解答例—

$x = a$ を代入すると

$$0 = 3a^2 - 10a + 3 = (3a - 1)(a - 3) \therefore a = 3, \frac{1}{3}$$

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = (3x^2 - 10x + 3)'$$

$$\therefore f(x) = 6x - 10$$

5 等式 $f(x) = -2x + 3 \int_0^3 f(t) dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

6 等式 $f(x) = -2x + 3 \int_0^3 f(t) dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

—解答例—

$\int_0^3 f(t) dt$ は定数ゆえこの値を C とおくと、

$$\int_0^3 f(t) dt = C \cdots \textcircled{1} \quad \text{かつ} \quad f(x) = -2x + 3C \cdots \textcircled{2}$$

②から $f(t) = -2t + 3C$ ゆえこれを①に代入し

$$\int_0^3 (-2t + 3C) dt = C$$

$$\therefore \left[-t^2 + 3Ct \right]_0^3 = C$$

$$\therefore -9 + 9C = C$$

これを解いて $C = \frac{9}{8}$ ゆえ

$$f(x) = -2x + \frac{27}{8}$$

小テスト (p160 例題 7 : 面積)

_____ 組 _____ 番 氏名 _____

7 放物線 $y = -x^2 + 2x + 3$ と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

7 放物線 $y = -x^2 + 2x + 3$ と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

—解答例—

$$y = -(x^2 - 2x - 3) = -(x + 1)(x - 3)$$

ゆえ、 $x = -1, 3$ で x 軸と交わる。

よって、求める面積は

$$\begin{aligned} \int_{-1}^3 (-x^2 + 2x + 3) dx &= \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \right]_{-1}^3 \\ &= (-9 + 9 + 9) - \left(\frac{1}{3} + 1 - 3 \right) = 9 - \frac{1}{3} + 2 = 11 - \frac{1}{3} = \frac{32}{3} \end{aligned}$$

小テスト (p163 例題 8 : 面積)

_____ 組 _____ 番 氏名 _____

8 放物線 $y = 2x^2 + 4x$ と直線 $y = x + 2$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

8 放物線 $y = 2x^2 + 4x$ と直線 $y = x + 2$ で囲まれた部分の面積を求めよ。

—解答例—

$$\begin{cases} y = 2x^2 + 4x \\ y = x + 2 \end{cases} \text{ を解くと}$$

$$2x^2 + 3x - 2 = (2x - 1)(x + 2) = 0 \text{ ゆえ } x = \frac{1}{2}, -2$$

区間 $-2 \leq x \leq \frac{1}{2}$ では直線の方が上だから

求める面積は

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{\frac{1}{2}} \{(x + 2) - (2x^2 + 4x)\} dx &= \int_{-2}^{\frac{1}{2}} (-2x^2 - 3x + 2) dx = -2 \int_{-2}^{\frac{1}{2}} (x - \frac{1}{2})(x + 2) dx \\ &= \frac{2(\frac{1}{2} + 2)^3}{6} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{125}{24} \end{aligned}$$