定積分の計算 No1 (表)

____ 組 ____ 番　氏名 ____________________

次の定積分を計算せよ。

1 易

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{(x+3)^2}{x+1}dx$

–解答例–

$x+1=t$ とおくと、

x	$0 \to 1$
t	$1 \to 2$

, $dx = dt$ ゆえ、

与式 $\displaystyle = \int_1^2 \frac{(t+2)^2}{t}dt = \int_1^2 \left(t+4+\frac{4}{t}\right)dt$

$\displaystyle = \left[\frac{t^2}{2}+4t+4\log t\right]_1^2$

$\displaystyle = \left(2+8+4\log 2\right) - \left(\frac{1}{2}+4\right) = \frac{11}{2}+4\log 2$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{e^x}$

–解答例–

与式 $\displaystyle = \int_0^1 e^{-x}dx = \left[-e^{-x}\right]_0^1 = \left(-\frac{1}{e}\right) - \left(-1\right) = -\frac{1}{e}+1$

(3) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx$

–解答例–

$\sin^2(-x) = (-\sin x)^2 = \sin^2 x$ ゆえ、$\sin^2 x$ は偶関数なので、

与式 $\displaystyle = 2\int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2x}{2}dx = \int_0^{\pi}(1-\cos 2x)dx$

$\displaystyle = \left[x - \frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi} = \pi$

(4) $\displaystyle\int_{-e}^{e} xe^{x^2}dx$

–解答例–

$(-x)e^{(-x)^2} = -xe^{x^2}$ ゆえ、xe^{x^2} は奇関数なので、

与式 $= 0$

2 普通

(1) $\displaystyle\int_1^2 x\sqrt{x-1}dx$

–解答例–

$x-1=t$ とおくと、

x	$1 \to 2$
t	$0 \to 1$

, $dx = dt$ ゆえ、

与式 $\displaystyle = \int_0^1 (t+1)\sqrt{t}dt = \int_0^1 (t^{\frac{3}{2}}+t^{\frac{1}{2}})dt = \left[\frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_0^1$

$\displaystyle = \frac{2}{5}+\frac{2}{3} = \frac{16}{15}$

(2) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^2-2x}{x^3-3x^2+1}dx$

–解答例–

$(x^3-3x^2+1)' = 3x^2-6x = 3(x^2-2x)$ ゆえ、

与式 $\displaystyle = \int_1^2 \frac{\frac{1}{3}(x^3-3x^2+1)'}{x^3-3x^2+1}dx = \frac{1}{3}\left[\log|x^3-3x^2+1|\right]_1^2$

$\displaystyle = \frac{1}{3}\left(\log|8-12+1| - \log|1-3+1|\right) = \frac{\log 3}{3}$

(3) $\displaystyle\int_0^{\pi} |\sin x\cos x|dx$

–解答例–

与式 $\displaystyle = \int_0^{\pi} \left|\frac{\sin 2x}{2}\right|dx$

$|\sin 2x|$ のグラフは、$x = \dfrac{\pi}{2}$ に関して対称なので (または，周期が $\dfrac{\pi}{2}$ なので)、

与式 $\displaystyle = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin 2x|dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx$

$\displaystyle = \left[-\frac{\cos 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left(-\frac{-1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$

定積分の計算 No1 (裏)

____ 組 ____ 番　氏名 ____________________

(4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{4-x^2}dx$

－解答例－

$$\frac{x^2}{4-x^2} = \frac{x^2-4+4}{4-x^2} = -1 + \frac{4}{(2-x)(2+x)}$$

$$= -1 + \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x} \text{ ゆえ、}$$

$$\text{与式} = \int_0^1 \left(-1 - \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2}\right)dx$$

$$= \Big[-x - \log|x-2| + \log|x+2|\Big]_0^1$$

$$= \Big(-1 - \log 1 + \log 3\Big) - \Big(0 - \log 2 + \log 2\Big) = -1 + \log 3$$

(5) $\displaystyle\int_0^1 \frac{xdx}{x+\sqrt{x^2+1}}$

－解答例－

$$\text{与式} = \int_0^1 \frac{x\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)}{x^2-(x^2+1)}dx = \int_0^1 x\sqrt{x^2+1}dx - \int_0^1 x^2dx$$

第１項において、$x^2+1=t$ とおくと、

x	0	$\to$	1
t	1	$\to$	2

, $2xdx = dt$ ゆえ、

$$\text{与式} = \int_1^2 \sqrt{t}\frac{dt}{2} - \int_0^1 x^2dx = \left[\frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_1^2 - \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1$$

$$= \frac{2(\sqrt{2}-1)}{3}$$

(6) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2\theta}{\sin\theta + \cos\theta}d\theta$

－解答例－

$$\text{与式} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2\theta}{\sin\theta+\cos\theta}d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{\sin\theta+\cos\theta}d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta - \sin\theta)d\theta = \Big[\sin\theta + \cos\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \Big(1+0\Big) - \Big(0+1\Big) = 0$$

【注意】結果を見ると対称性を使って説明することが出来そうだ。

$$\text{与式} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2\theta}{\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)}d\theta = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)}{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}dx$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{-\sin 2x}{\sqrt{2}\cos x}dx = 0$$

単純に分母は $\theta = \frac{\pi}{4}$ に関して対称で，分子は $\left(\theta, y\right) = \left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$ に関して点対称だからでもわかる。

(7) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^2 x\cos^3 x dx$

－解答例－

$\sin x = t$ とおくと、

x	0	$\to$	π
t	0	$\to$	0

, $\cos x dx = dt$ ゆえ、

$$\text{与式} = \int_0^0 t^2(1-t^2)dt = 0$$

【注意】積分範囲が 0 から 0 になってもかまわない。気になるようなら，対称性を使って説明しても良い。

$\sin^2 x\cos^3 x$ は $\left(x, y\right) = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ に関して点対称である。または，平行移動（変数を置換）して $\sin^2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos^3\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ が奇関数であることを使えばよい。

(8) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{x^2-x}{\sqrt[3]{x}}dx$

－解答例－

$$\text{与式} = \int_{-2}^{-1}\left(x^{\frac{5}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)dx = \left[\frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}} - \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}\right]_{-2}^{-1}$$

$$= \left[\frac{3x^2\sqrt[3]{x^2}}{8} - \frac{3x\sqrt[3]{x^2}}{5}\right]_{-2}^{-1} = \frac{39-108\sqrt[3]{4}}{40}$$

【注意】分数指数を定義したとき，底を正に制限した。厳密には $x>0$ でなければならないが，結果的には成り立つので上のように $x \leqq 0$ の場合も使っている。ただし，分数指数のままで負の数を代入するのはまずいので，累乗根の形に直してから代入すること。

3 やや難

(1) $\displaystyle\int_0^4 \left|\frac{x-a}{x+2}\right|dx$

－解答例－

$$\text{与式} = \int_0^4 \frac{|x-a|}{x+2}dx$$

$a<0$ のとき、$x-a>0$ ゆえ、

$$\text{与式} = \int_0^4 \frac{x-a}{x+2}dx = \int_0^4 \frac{x+2-a-2}{x+2}dx$$

$$= \int_0^4\left(1 - \frac{a+2}{x+2}\right)dx = \Big[x-(a+2)\log|x+2|\Big]_0^4$$

$$= \Big(4-(a+2)\log 6\Big) - \Big(-(a+2)\log 2\Big) = 4-(a+2)\log 3$$

$4 \leqq a$ のとき、$x-a \leqq 0$ ゆえ、

$$\text{与式} = \int_0^4 \frac{-(x-a)}{x+2}dx = -4 + (a+2)\log 3$$

$0 \leqq a < 4$ のとき、

$$\text{与式} = \int_0^a \frac{-(x-a)}{x+2}dx + \int_a^4 \frac{x-a}{x+2}dx$$

$$= \int_0^a\left(-1 + \frac{a+2}{x+2}\right)dx + \int_a^4\left(1 - \frac{a+2}{x+2}\right)dx$$

$$= \Big[-x+(a+2)\log|x+2|\Big]_0^a + \Big[x-(a+2)\log|x+2|\Big]_a^4$$

$$= \Big(-a+(a+2)\log(a+2)\Big) - \Big((a+2)\log 2\Big)$$

$$+\Big(4-(a+2)\log 6\Big) - \Big(a-(a+2)\log(a+2)\Big)$$

$$= -2a + 2(a+2)\log(a+2) - (a+2)\log 2 + 4 - (a+2)\log 6$$

$$= 4 - 2a + 2(a+2)\log(a+2) - (a+2)\log 12$$

定積分の計算演習 No2 (表)

____ 組 ____ 番　氏名 ____________________

次の定積分を計算せよ。

1 易

(1) $\displaystyle\int_2^3 \frac{xdx}{(x-1)(2x-1)}$

― 解答例 ―

$\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{2x-1} = \dfrac{x}{(x-1)(2x-1)}$ ゆえ、

与式 $= \displaystyle\int_2^3 \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2x-1}\right) dx$

$= \left[\log|x-1| - \dfrac{1}{2}\log|2x-1|\right]_2^3$

$= \log 2 - \dfrac{1}{2}\log 5 + \dfrac{1}{2}\log 3$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{e^{1-t}}dt$

― 解答例 ―

与式 $= \displaystyle\int_0^1 e^{\frac{1-t}{2}}dt = \left[-2e^{\frac{1-t}{2}}\right]_0^1 = -2 + 2\sqrt{e}$

(3) $\displaystyle\int_{-1}^1 x(x^2+1)^2 dx$

― 解答例 ―

$(-x)\{(-x)^2+1\}^2 = -x(x^2+1)^2$ ゆえ、奇関数なので、

与式 $= 0$

2 普通

(1) $\displaystyle\int_1^0 \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$

― 解答例 ―

$1 + x = t$ とおくと、

x	1	$\to$	0
t	2	$\to$	1

, $dx = dt$ ゆえ

与式 $= \displaystyle\int_2^1 \frac{t-1}{\sqrt{t}}dt = \int_2^1 \left(t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}\right)dt = \left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} - 2t^{\frac{1}{2}}\right]_2^1$

$= \dfrac{2}{3} - 2 - \dfrac{4\sqrt{2}}{3} + 2\sqrt{2} = \dfrac{2\sqrt{2}-4}{3}$

(2) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2e^x}{e^x+1}dx$

― 解答例 ―

与式 $= 2\displaystyle\int_0^1 \frac{(e^x+1)'}{(e^x+1)}dx = 2\Big[\log(e^x+1)\Big]_0^1 = 2\log\frac{e+1}{2}$

(3) $\displaystyle\int_1^e \frac{\sqrt{x^2-4x+4}}{x}dx$

― 解答例 ―

与式 $= \displaystyle\int_1^e \frac{\sqrt{(x-2)^2}}{x}dx = \int_1^e \frac{|x-2|}{x}dx$

$= \displaystyle\int_1^2 \frac{|x-2|}{x}dx + \int_2^e \frac{|x-2|}{x}dx$

$= \displaystyle\int_1^2 \frac{2-x}{x}dx + \int_2^e \frac{x-2}{x}dx$

$= \displaystyle\int_1^2 \left(\frac{2}{x} - 1\right)dx + \int_2^e \left(1 - \frac{2}{x}\right)dx$

$= \Big[2\log|x| - x\Big]_1^2 + \Big[x - 2\log|x|\Big]_2^e$

$= \Big(2\log 2 - 2\Big) - \Big(0 - 1\Big) + \Big(e - 2\log e\Big) - \Big(2 - 2\log 2\Big)$

$= 4\log 2 + e - 5$

(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^4+1}{x^2-1}dx$

― 解答例 ―

$\dfrac{x^4+1}{x^2-1} = \dfrac{(x^2-1)(x^2+1)+2}{x^2-1}$

$\dfrac{2}{x^2-1} = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1}$ ゆえ

与式 $= \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \left(x^2 + 1 + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)dx$

$= \left[\dfrac{x^3}{3} + x + \log|x-1| - \log|x+1|\right]_0^{\frac{1}{2}}$

$= \left(\dfrac{1}{24} + \dfrac{1}{2} + \log\dfrac{1}{2} - \log\dfrac{3}{2}\right) - \Big(0\Big)$

$= \dfrac{13}{24} - \log 3$

定積分の計算演習 No2 (裏)

＿＿ 組 ＿＿ 番　氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

(5) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{d\theta}{\sin^2\theta}$

－解答例－

$\dfrac{1}{\sin^2\theta} = \dfrac{1}{\cos^2\theta\cdot\tan^2\theta}$

$\tan\theta = t$ とおくと、$\begin{array}{c|ccc} \theta & \frac{\pi}{4} & \to & \frac{\pi}{3} \\ \hline t & 1 & \to & \sqrt{3} \end{array}$, $\dfrac{d\theta}{\cos^2\theta} = dt$ ゆえ

与式 $= \displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dt}{t^2} = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^{\sqrt{3}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$

注意） $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\tan x} + C$ を使うとはやい。

(6) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2-\sin^2 x}dx$

－解答例－

$\sin x = t$ とおくと、$\begin{array}{c|ccc} x & 0 & \to & \frac{\pi}{2} \\ \hline t & 0 & \to & 1 \end{array}$, $\cos x dx = dt$ ゆえ

与式 $= \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{2-t^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{2}-t} + \frac{1}{\sqrt{2}+t}\right)dt$

$= \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\Big[-\log|\sqrt{2}-t| + \log|\sqrt{2}+t|\Big]_0^1 = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\log\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$

$= \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\log(\sqrt{2}+1)^2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\log(\sqrt{2}+1)$

(7) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx dx$

－解答例－

$\sin mx \sin nx = -\dfrac{1}{2}\{\cos(m+n)x - \cos(m-n)x\}$ だから

$m \neq \pm n$ のとき

与式 $= \displaystyle -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\{\cos(m+n)x - \cos(m-n)x\}dx$

$= \displaystyle -\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n} - \frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right]_0^{2\pi} = 0$

$m = n \neq 0$ のとき

与式 $= \displaystyle -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\cos 2mx - 1)dx = -\frac{1}{2}\left[\frac{\sin 2mx}{2m} - x\right]_0^{2\pi} = \pi$

$m = -n \neq 0$ のとき

与式 $= \displaystyle -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos 2mx)dx = -\pi$

$m = n = 0$ のとき

与式 $= \displaystyle\int_0^{2\pi} 0dx = 0$

(8) $\displaystyle\int_1^2 \sqrt[3]{3-x}dx$

－解答例－

与式 $= \displaystyle\int_1^2 (3-x)^{\frac{1}{3}}dx = \left[-\frac{3}{4}(3-x)^{\frac{4}{3}}\right]_1^2 = -\frac{3}{4}(1-\sqrt[3]{2^4})$

$= \dfrac{6\sqrt[3]{2}-3}{4}$

3 やや難

(1) $\displaystyle\int_0^4 \sqrt{1+|a-x|}dx$

－解答例－

$a < 0$ のとき、$a - x < 0$ ゆえ

与式 $= \displaystyle\int_0^4 \sqrt{1-a+x}dx = \frac{2}{3}\left[(x-a+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^4$

$= \dfrac{2}{3}\{(5-a)^{\frac{3}{2}} - (1-a)^{\frac{3}{2}}\}$

$0 \leqq a < 4$ のとき、

与式 $= \displaystyle\int_0^a \sqrt{1+a-x}dx + \int_a^4 \sqrt{1-a+x}dx$

$= -\dfrac{2}{3}\left[(1+a-x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^a + \dfrac{2}{3}\left[(1-a+x)^{\frac{3}{2}}\right]_a^4$

$= -\dfrac{2}{3}\{1-(1+a)^{\frac{3}{2}}\} + \dfrac{2}{3}\{(5-a)^{\frac{3}{2}} - 1\}$

$= -\dfrac{4}{3} + \dfrac{3}{2}\{(5-a)^{\frac{3}{2}} + (1+a)^{\frac{3}{2}}\}$

$4 < a$ のとき、$a - x > 0$ ゆえ

与式 $= \displaystyle\int_0^4 \sqrt{1+a-x}dx = -\frac{2}{3}\left[(1+a-x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^4$

$= -\dfrac{2}{3}\{(a-3)^{\frac{3}{2}} - (1+a)^{\frac{3}{2}}\}$

(2) $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)dx = \int_0^a \{f(x)+f(-x)\}dx$ を示し、$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{1+e^{-x}}dx$ の値を求めよ。

－解答例－

$\displaystyle\int_0^a f(-x)dx$ において、$-x = t$ とおくと、

$\begin{array}{c|ccc} x & 0 & \to & a \\ \hline t & 0 & \to & -a \end{array}$, $-dx = dt$ ゆえ、

$\displaystyle\int_0^a f(-x)dx = \int_0^{-a} f(t)(-dt) = \int_{-a}^0 f(t)dt = \int_{-a}^0 f(x)dx$

よって、$\displaystyle\int_0^a \{f(x)+f(-x)\}dx = \int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(-x)dx$

$= \displaystyle\int_0^a f(x)dx + \int_{-a}^0 f(x)dx = \int_{-a}^a f(x)dx$ が成り立つ。

これを使うと、

$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^3 x}{1+e^{-x}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{\frac{\cos^3 x}{1+e^{-x}} + \frac{\cos^3(-x)}{1+e^x}\right\}dx$

$= \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{\frac{e^x\cos^3 x}{e^x+1} + \frac{\cos^3 x}{1+e^x}\right\}dx$

$= \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)\cos x dx$

$\sin x = t$ とおくと、$\begin{array}{c|ccc} x & 0 & \to & \frac{\pi}{2} \\ \hline t & 0 & \to & 1 \end{array}$, $\cos x dx = dt$ ゆえ

与式 $= \displaystyle\int_0^1 (1-t^2)dt = \left[t - \frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$

定積分の計算演習 No3(表)

＿＿ 組 ＿＿ 番　氏名 ＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

次の定積分を計算せよ。

1 易

(1) $\displaystyle\int_0^3 \sqrt{9-x^2}dx$

– 解答例 –

$x = 3\sin\theta$ とおくと、

x	0	$\to$	3
$\sin\theta$	0	$\to$	1
θ	0	$\to$	$\frac{\pi}{2}$

, $dx = 3\cos\theta d\theta$ ゆえ

与式 $\displaystyle = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |3\cos\theta| 3\cos\theta d\theta = 9\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta$

$\displaystyle = \frac{9}{2}\left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{9\pi}{4}$

(2) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+1}$

– 解答例 –

$x = \tan\theta$ とおくと、

x	0	$\to$	$\sqrt{3}$
θ	0	$\to$	$\frac{\pi}{3}$

, $dx = \dfrac{d\theta}{\cos^2\theta}$ ゆえ

与式 $\displaystyle = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\tan^2\theta + 1}\frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta = \Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi}{3}$

(3) $\displaystyle\int_0^1 xe^{2x}dx$

– 解答例 –

与式 $\displaystyle = \left[x\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}\left[e^{2x}\right]_0^1$

$\displaystyle = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2+1}{4}$

2 普通

(1) $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2+1}$

– 解答例 –

$x-1 = \tan\theta$ とおくと、

x	1	$\to$	2
$\tan\theta$	0	$\to$	1
θ	0	$\to$	$\frac{\pi}{4}$

, $dx = \dfrac{d\theta}{\cos^2\theta}$ ゆえ

与式 $\displaystyle = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\tan^2\theta+1}\frac{d\theta}{\cos^2\theta} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \Big[\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}$

(2) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$

– 解答例 –

$(-x)\cos(-x) = -x\cos x$ ゆえ、奇関数なので

与式 $= 0$

(3) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2}x}{\sqrt{1+x^2}}$ のとき、$\displaystyle\int_0^1 f^{-1}(x)dx$

– 解答例 –

$f^{-1}(x) = y$ とおくと、$x = f(y) = \dfrac{\sqrt{2}y}{\sqrt{1+y^2}}$.

$x = 0$ のとき、$y = 0$,

$x = 1$ のとき、$1+y^2 = 2y^2$. $y > 0$ ゆえ、$y = 1$.

$\displaystyle dx = \frac{\sqrt{2}\sqrt{1+y^2} - \sqrt{2}y\dfrac{2y}{2\sqrt{1+y^2}}}{1+y^2}dy = \frac{\sqrt{2}}{(1+y^2)\sqrt{1+y^2}}dy$

よって、

$\displaystyle\int_0^1 f^{-1}(x)dx = \int_0^1 f^{-1}(f(y))\frac{\sqrt{2}}{(1+y^2)\sqrt{1+y^2}}dy$

$\displaystyle = \int_0^1 \frac{\sqrt{2}y}{(1+y^2)^{\frac{3}{2}}}dy$

$1+y^2 = t$ とおくと、

y	0	$\to$	1
t	1	$\to$	2

, $2ydy = dt$ ゆえ

$\displaystyle\int_0^1 f^{-1}(x)dx = \int_1^2 \frac{\sqrt{2}}{t^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{2}dt = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_1^2 t^{-\frac{3}{2}}dt$

$\displaystyle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[-2t^{-\frac{1}{2}}\right]_1^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\frac{2}{\sqrt{2}} + 2) = \sqrt{2} - 1$