数学II Bの演習　目次

微分　No1　極限 · 接線

____ 組 ____ 番　氏名 ____________________

$\boxed{1}$ $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{ax^2-7x+b}{x^2+x-2}=1$ のとき、定数 a , b の値を求めよ。

—解答例—

$\displaystyle\lim_{x\to1}(ax^2-7x+b)=\lim_{x\to1}(x^2+x-2)\frac{ax^2-7x+b}{x^2+x-2}=0\times1=0$

よって、$b=-a+7$.

このとき、

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{ax^2-7x+b}{x^2+x-2} &= \lim_{x\to1}\frac{ax^2-7x-a+7}{(x-1)(x+2)}\\ &= \lim_{x\to1}\frac{a(x^2-1)-7(x-1)}{(x-1)(x+2)}\\ &= \lim_{x\to1}\frac{a(x+1)-7}{x+2}\\ &= \frac{2a-7}{3}=1\end{aligned}$$

よって、$a=5,\ b=2$.

$\boxed{2}$ $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ において $f'(0)=3$, $f'(1)=2$, $f'(2)=7$ であるという。$f'(3)$ はいくらか

—解答例—

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$.

仮定から、$f'(0)=c=3,\ f'(1)=3a+2b+c=2,\ f'(2)=12a+4b+c=7$.

これを解いて、$a=1,\ b=-2,\ c=3$.

したがって、$f'(3)=3\cdot3^2-4\cdot3+3=18$

$\boxed{3}$ 曲線 $y=x^3-3x^2+2$ について、

(1) 曲線上の x 座標が 2 である点における接線

(2) 傾きが 9 である接線を求めよ。

—解答例—

$y'=3x^2-6x$

(1) $x=2$ のとき、$y=8-12+2=-2$. 傾きは、$y'=12-12=0$.
よって、傾き 0 , 点 $(2,-2)$ を通る直線ゆえ、$y-(-2)=0(x-2)$. 整理して $y=-2$

(2) $y'=3x^2-6x=9$ をといて、$(x+1)(x-3)=0$ から、$x=-1,\ 3$. これが接点の x 座標である。
$x=-1$ のとき、接点は $(-1,-2)$、傾き 9 ゆえ、$y-(-2)=9(x+1)$. よって、$y=9x+7$.
$x=3$ のとき、接点は $(3,2)$. 傾き 9 ゆえ、$y-2=9(x-3)$. よって、$y=9x-25$.

$\boxed{4}$ 点 $\mathrm{A}(-1,5)$ より曲線 $y=-x^3+3x^2+1$ にひいた接線の方程式を求めよ。

—解答例—

接点を $\mathrm{P}(a,-a^3+3a^2+1)$ とおく。$y'=-3x^2+6x$ ゆえ、接線の方程式は、$y-(-a^3+3a^2+1)=(-3a^2+6a)(x-a)$. これが点 $(-1,5)$ を通るので、$5-(-a^3+3a^2+1)=(-3a^2+6a)(-1-a)$. 展開整理して、$2a^3-6a-4=0$. 因数分解して、$2(a+1)^2(a-2)=0$. これを解いて、$a=-1,\ 2$.

$a=-1$ のとき、接点は $(-1,5)$. 傾きは $-3-6=-9$. よって、$y-5=-9(x+1)$. ゆえ、$y=-9x-4$.

$a=2$ のとき、接点は $(2,5)$. 傾きは 0. よって、$y-5=0(x-2)$. ゆえ、$y=5$.

$\boxed{5}$ 関数 $f(x)=x^3-6x^2+9x-2$ の増減を調べ、極値を求めてグラフをかけ。

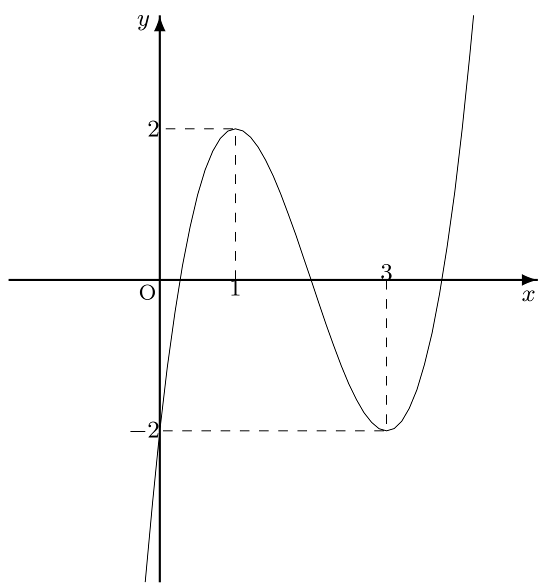
—解答例—

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$

増減表は、

x	...	1	...	3	...
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↘	-2	↗

表より、$x=1$ のとき極大値 2, $x=3$ のとき極小値 -2



微分　No2　微分法の応用

____ 組 ____ 番　氏名 ____________________

$\boxed{1}$ 関数 $f(x)=x^3+3ax^2+3(a+2)x+1$ が極値をもつように、定数 a の範囲を求めよ。

—解答例—

$f'(x)=3x^2+6ax+3(a+2)=3\{x^2+2ax+(a+2)\}$. $\dfrac{D}{4}=a^2-(a+2)=(a+1)(a-2)$ とおく。

(1) $\dfrac{D}{4}<0$ すなわち、$-1<a<2$ のとき、つねに $f'(x)>0$ なので、$f(x)$ は極値をもたない。

(2) $\dfrac{D}{4}=0$ すなわち、$a=-1,\ 2$ のとき、つねに $f'(x)\geqq 0$ なので、$f(x)$ は極値をもたない。

(3) $\dfrac{D}{4}>0$ すなわち、$a<-1,\ 2<a$ のとき、$f'(x)=0$ の実数解が 2 つ存在し、異なる。これらの実数解の前後で $f'(x)$ の符号が変わるので、$f(x)$ は極値をもつ。

以上から、求める a の値の範囲は、$a<-1,\ 2<a$

$\boxed{2}$ 3 次関数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ が $x=2$ で極大値 2 , $x=1$ で極小値 1 をとるという。定数 a , b , c の値を求めよ。

—解答例—

$f'(x)=3ax^2+2bx+c.$

$x=2,\ x=1$ で極値をもつから、

$f'(2)=12a+4b+c=0\cdots①,\ f'(1)=3a+2b+c=0\cdots②.$

また、$f(2)=2,\ f(1)=1$ ゆえ、

$8a+4b+2c+d=2\cdots③,\ a+b+c+d=1\cdots④.$

これを解いて、$(a,b,c,d)=(-2,9,-12,6)\cdots$Ⓐ.

このとき、$f'(x)=-6x^2+18x-12=-6(x-1)(x-2)$ ゆえ増減表は

x	...	1	...	2	...
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘	1	↗	2	↘

よって、$x=2$ で極大値、$x=1$ と極小値となるので、Ⓐ が求めるものである。

$\boxed{3}$ 底面の半径が $15cm$ 高さが $30cm$ の直円すいに、底面を共有して内接する直円柱の体積の最大値を求めよ。

—解答例—

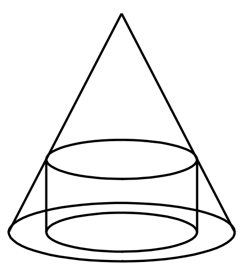
直円柱の底面の半径を x, 高さを h とおくと、$h=30-2x$ ゆえ、体積 V は、$V=\pi x^2h=\pi x^2(30-2x)=-2\pi x^3+30\pi x^2.$

$\dfrac{dV}{dx}=-6\pi x^2+60\pi x=-6\pi x(x-10)$

$0<x<15$ に注意して増減表をかくと

x	0	...	10	...	15
V'		$+$	0	$-$	
V	0	↗	1000π	↘	0

したがって、底面の半径が $10cm$ のとき体積は最大値 $1000\pi cm^3$ となる。



$\boxed{4}$ 3 次方程式 $x^3-x^2-x+a=0$ がある。

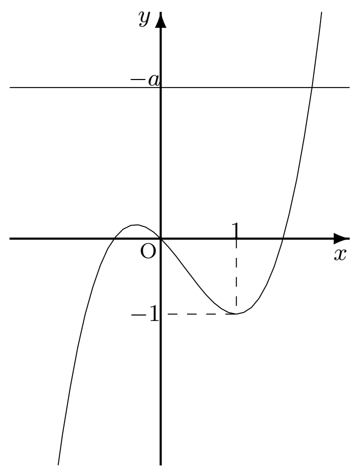
(1) 異なる 3 実数解をもつときの a の値の範囲を求めよ。

(2) 異なる 2 つの負の解と 1 つの正の解をもつときの a の値の範囲を求めよ。

—解答例—

与式を $x^3-x^2-x=-a$ と変形し、$f(x)=x^3-x^2-x$ とおく。$f'(x)=3x^2-2x-1=(x-1)(3x+1)$ ゆえ、増減表は次のようになる。

x	...	$-\dfrac{1}{3}$	...	1	...
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	$\dfrac{5}{27}$	↘	-1	↗



(1) グラフと増減表から、異なる 3 実数解をもつのは $-1<-a<\dfrac{5}{27}$ のときである。

よって、$-\dfrac{5}{27}<a<1.$

(2) グラフと増減表から、異なる 2 つの負の解と 1 つの正の解をもつのは $0<-a<\dfrac{5}{27}$ のときである。よって、$-\dfrac{5}{27}<a<0.$

$\boxed{5}$ $x\geqq -1$ のとき、次の不等式を証明せよ。

$$(x-1)^3\geqq 3x-5$$

—解答例—

$f(x)=$ 左辺 $-$ 右辺 $=(x-1)^3-(3x-5)=x^3-3x^2+4$ とおく。

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$x\geqq -1$ で増減表をかくと、

x	-1	...	0	...	2	...
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	0	↗	4	↘	0	↗

増減表から、$x\geqq -1$ では $f(x)=(x-1)^3-(3x-5)\geqq 0$ が成り立つ。

よって、$(x-1)^3\geqq 3x-5\ (x\geqq -1)$ が成り立つ。

微分　No3　微分法の応用

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ 原点 O を出発して x 軸上を運動する点 P の t 秒後の座標 $x(t)$ が次の式で与えられている。

$$x = 12t - t^3$$

(1) 動き出してから 1 秒後の速度と加速度を求めよ。

(2) 動き出してから何秒後にはじめて向きを変えるか。また、そのときの点 P の位置を求めよ。

(3) 動き出してから再び原点にもどったときの速さを求めよ。

—解答例—

(1) $v = \dfrac{dx}{dt} = 12 - 3t^2$, $\alpha = \dfrac{dv}{dt} = -6t$.
$t = 1$ のとき、速度は $v = 12 - 3 = 9$, 加速度は $\alpha = -6$

(2) $v = -3(t-2)(t+2)$ ゆえ、

t	0	...	2	...
v		$+$	0	$-$
x	0	↗	16	↘

表より $t = 2$ のときはじめて向きを変える。このとき P(16) である。

(3) $x = 12t - t^3 = t(12 - t^2) = 0$ $x > 0$ を解くと、$t = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.
このときの速度は、$v = 12 - 3(2\sqrt{3})^2 = 12 - 3 \cdot 12 = -24$.

$\boxed{2}$ $x \geqq 1$ のとき、不等式 $x^3 + 2 \geqq 3x$ が成り立つことを証明せよ。

—解答例—

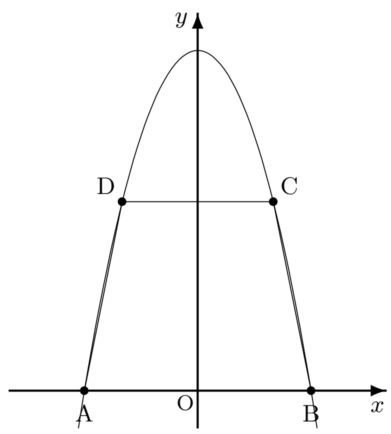
$f(x) =$ 左辺 $-$ 右辺 とおくと、$f(x) = (x^3+2) - 3x$. $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$ ゆえ、

x	1	...
$f'(x)$		$+$
$f(x)$	0	↗

増減表より、$f(x) = (x^3+2) - 3x \geqq 0$ $(x \geqq 1)$ が成り立つので、$x^3+2 \geqq 3x$ $(x \geqq 1)$ は成り立つ。

$\boxed{3}$ 放物線 $y = 9 - x^2$ と x 軸との交点を A , B とする。線分 AB とこの放物線とで囲まれた部分に内接する台形 ABCD の面積が最大になるときの点 C , D の座標を求めよ。

—解答例—



$A(-3, 0)$, $B(3, 0)$, $C(x, 9 - x^2)$, $D(-x, 9 - x^2)$ $(0 < x < 3)$ とおく。
台形の面積を S(x) とおくと、$S(x) = \dfrac{(6+2x)(9-x^2)}{2} = (3+x)(9-x^2) = -x^3 - 3x^2 + 9x + 27$. $(0 < x < 3)$. $S'(x) = -3x^2 - 6x + 9 = -3(x^2+2x-3) = -3(x-1)(x+3)$.
$0 < x < 3$ の範囲で $S'(x) = 0$ を解くと、$x = 1$.

x	0	...	1	...	3
$S'(x)$		$+$	0	$-$	
$S(x)$	27	↗	32	↘	0

増減表から、$x = 1$ のとき最大となり、$C(1, 8)$, $D(-1, 8)$ である。

$\boxed{4}$ 点 $\mathrm{A}(-1, a)$ を通り曲線 $y = x^3 - 3x$ に何本の接線が引けるか。

—解答例—

接点の座標を $P(t, t^3 - 3t)$ とおく。$y' = 3x^2 - 3$ ゆえ、点 P における接線の傾きは、$3t^2 - 3$. よって、接線の方程式は、$y - (t^3 - 3t) = (3t^2 - 3)(x - t)$.
これが、点 A を通るとして、$a - t^3 + 3t = (3t^2 - 3)(-1 - t)$. 整理して、$-2t^3 - 3t^2 + 3 = a$.
３次関数のグラフの接線は、接点が違えば接線も違うので、この方程式の実数解の個数と接線の本数は一致する。
$f(t) = -2t^3 - 3t^2 + 3$ とおく。$f'(t) = -6t^2 - 6t = -6t(t+1)$. $f'(t) = 0$ を解くと、$t = 0, -1$.

t	...	-1	...	0	...
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(t)$	↘	2	↗	3	↘

このグラフと、$y = a$ の交点の個数を考えて、
$a > 3$ のとき、１本。
$a = 3$ のとき、２本。
$2 < a < 3$ のとき、３本。
$a = 2$ のとき、２本。
$a < 2$ のとき、１本。

積分　No1　積分

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ $f'(x)=-3x^2+4x+1,\ \ f(1)=2$ を満たす $f(x)$ を求めよ。

—解答例—

$f(x)=\int(-3x^2+4x+1)dx=-x^3+2x^2+x+C$

$f(1)=-1+2+1+C=2$ ゆえ、$C=0.$

よって、$f(x)=-x^3+2x^2+x.$

$\boxed{2}$ 次の定積分の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_{-2}^{2}(x+1)^3dx$

—解答例—

$$与式=\int_{-2}^{2}(x^3+3x^2+3x+1)dx$$
$$=2\int_0^2(3x^2+1)dx=2\left[x^3+x\right]_0^2=20.$$

(2) $\displaystyle\int_{-3}^{-1}(x^2-2x)dx+\int_{-1}^{3}(x^2-2x)dx$

—解答例—

$$与式=\int_{-3}^{3}(x^2-2x)dx=2\int_0^3x^2dx=2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3=18.$$

(3) $\displaystyle\int_2^8|x-4|dx$

—解答例—

$$与式=\int_2^4|x-4|dx+\int_4^8|x-4|dx$$
$$=\int_2^4(-x+4)dx+\int_4^8(x-4)dx$$
$$=\left[-\frac{x^2}{2}+4x\right]_2^4+\left[\frac{x^2}{2}-4x\right]_4^8$$
$$=(-8+16)-(-2+8)+(32-32)-(8-16)$$
$$=8-6+0+8=10.$$

(4) $\displaystyle\int_0^2|x^2-2x-3|dx$

—解答例—

$0\leqq x\leqq 2$ で、$x^2-2x-3=(x+1)(x-3)<0$ ゆえ、

$$与式=\int_0^2(-x^2+2x+3)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+x^2+3x\right]_0^2$$
$$=-\frac{8}{3}+4+6=\frac{22}{3}.$$

$\boxed{3}$ $f(x)=x^3-3x+\displaystyle\int_0^2f(t)dt$ のとき $f(x)$ を求めよ。

—解答例—

$\displaystyle\int_0^2f(t)dt=C$ (C は定数) とおける。このとき、$f(x)=x^3-3x+C.$

ゆえ、

$$C=\int_0^2(t^3-3t+C)dt=\left[\frac{t^4}{4}-\frac{3}{2}t^2+Ct\right]_0^2=4-6+2C.$$

これを解いて、$C=2.$ よって、$f(x)=x^3-3x+2.$

$\boxed{4}$ $\displaystyle\int_0^xf(t)dt=x^2-2x+a$ のとき $f(x)$ 及び a の値を求めよ。

—解答例—

$\displaystyle\int_0^0f(t)dt=a=0.$

また、両辺を x で微分して、$f(x)=2x-2.$

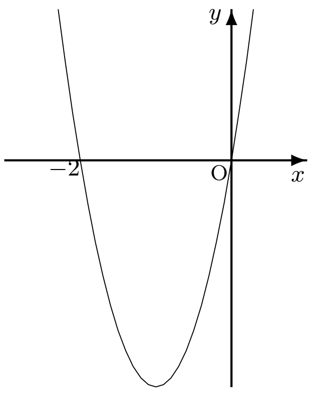
積分　No2　囲まれた部分の面積

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ 次の曲線または直線によって囲まれた部分の面積を求めよ。

(1) $y = 3x^2 + 6x$, x 軸

—解答例—

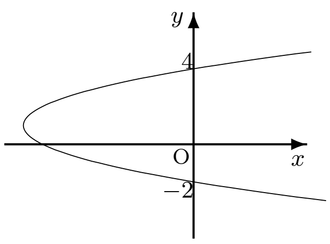


$y = 3x(x+2)$ ゆえグラフは左図の通り。よって求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= -\int_{-2}^{0}(3x^2+6x)dx \\ &= -\int_{-2}^{0} 3x(x+2)dx \\ &= \frac{3}{6}(0+2)^3 \\ &= 4 \end{aligned}$$

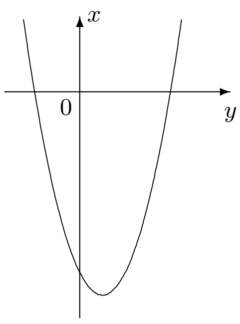
(2) $x = y^2 - 2y - 8$, y 軸

—解答例—



$x = (y+2)(y-4)$ ゆえグラフは左図の通り。よって面積は

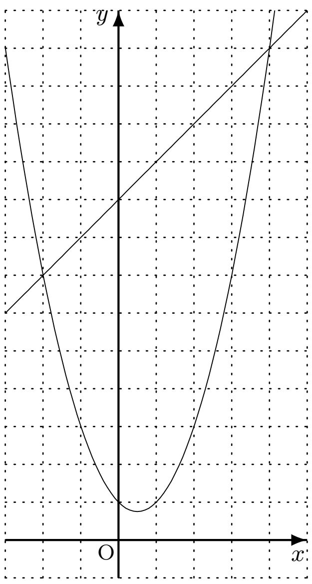
$$\begin{aligned} S &= -\int_{-2}^{4}(y+2)(y-4)dy \\ &= \frac{1}{6}(4+2)^3 \\ &= 36 \end{aligned}$$



のように、x 軸と y 軸を入れ替えてグラフを描いてもよい。

(3) $y = x^2 - x + 1$, $y = x + 9$

—解答例—



交点を求める。$\begin{cases} y &= x^2 - x + 1 \\ y &= x + 9 \end{cases}$

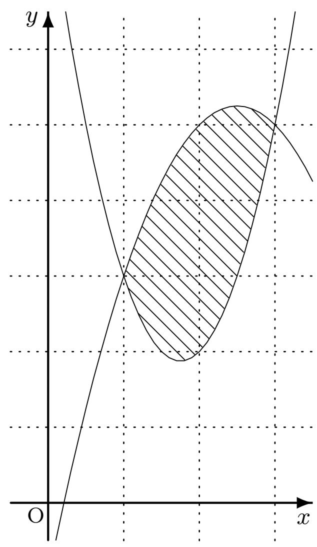
から $x^2 - 2x - 8 = (x+2)(x-4) = 0$

$\therefore x = -2, 4$

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^{4}\{(x+9)-(x^2-x+1)\}dx \\ &= -\int_{-2}^{4}(x+2)(x-4)dx \\ &= \frac{1}{6}(4+2)^3 \\ &= 36 \end{aligned}$$

(4) $y = 2x^2 - 7x + 8,\ y = -x^2 + 5x - 1$

—解答例—



交点を求める。

$\begin{cases} y &= 2x^2 - 7x + 8 \\ y &= -x^2 + 5x - 1 \end{cases}$ から

$3x^2 - 12x + 9 = 0 \therefore (x-1)(x-3) = 0$

$\therefore x = 1, 3$

$$\begin{aligned} S &= \int_{1}^{3}\Big\{(-x^2+5x-1) \\ &\qquad -(2x^2-7x+8)\Big\}dx \\ &= -3\int_{1}^{3}(x-1)(x-3)dx \\ &= \frac{3}{6}(3-1)^3 = 4 \end{aligned}$$

(5) $y = x^3 - 3x^2$, $y = x - 3$

—解答例—

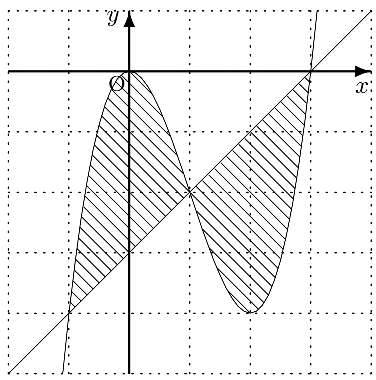
交点を求める。$\begin{cases} y &= x^3 - 3x^2 \\ y &= x - 3 \end{cases}$

より $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$

$\therefore x^2(x-3) - (x-3) = 0$

$\therefore (x-1)(x+1)(x-3) = 0$

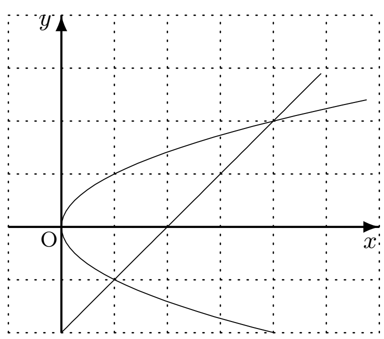
$\therefore x = 3, 1, -1$



$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{1}\{(x^3-3x^2)-(x-3)\}dx \\ &\quad + \int_{1}^{3}\{(x-3)-(x^3-3x^2)\}dx \\ &= 2\int_{0}^{1}(-3x^2+3)dx + \int_{1}^{3}(-x^3+3x^2+x-3)dx \\ &= 2\Big[-x^3+3x\Big]_0^1 + \Big[-\frac{1}{4}x^4+x^3+\frac{1}{2}x^2-3x\Big]_1^3 \\ &= 4 + \left(-\frac{81}{4}+27+\frac{9}{2}-9\right) - \left(-\frac{1}{4}+1+\frac{1}{2}-3\right) \\ &= 4 - 20 - \cancel{\frac{1}{4}} + 22 + \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{4}} + 2 - \cancel{\frac{1}{2}} = 8 \end{aligned}$$

(6) $y^2 = x$, $y = x - 2$

—解答例—



交点を求める。$\begin{cases} y^2 &= x \\ y &= x - 2 \end{cases}$ から $y = y^2 - 2 \therefore y^2 - y - 2 = 0$

$\therefore (y+1)(y-2) = 0 \therefore y = -1, 2$

よって面積は

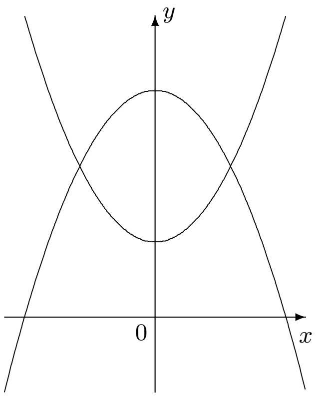
$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^{2}\{(y+2)-y^2\}dy \\ &= -\int_{-1}^{2}(y+1)(y-2)dy \\ &= \frac{1}{6}(2+1)^3 \\ &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$

積分　No3　面積

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ 2つの放物線 $y=-x^2+k$ と $y=x^2+1$ とで囲まれる部分の面積が $\dfrac{8}{3}$ になるように定数 k の値を定めよ。

—解答例—



図より $k>1$ である。

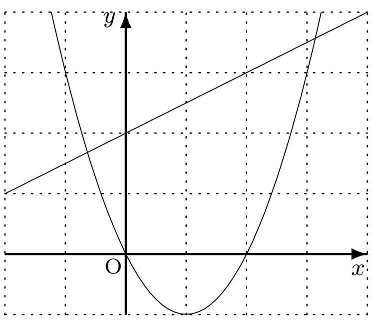
交点を求めると、$\begin{cases} y &= -x^2+k \\ y &= x^2+1 \end{cases}$ ゆえ

$2x^2=k-1 \therefore x=\pm\sqrt{\dfrac{k-1}{2}}$ この値を $\pm\alpha\ (\alpha>0)$ とおく。

$$\begin{aligned}
\int_{-\alpha}^{\alpha}\{(-x^2+k)-(x^2+1)\}dx &= \frac{8}{3}\\
-2\int_{-\alpha}^{\alpha}(x-\alpha)(x+\alpha)dx &= \frac{8}{3}\\
\frac{2}{6}(\alpha+\alpha)^3 &= \frac{8}{3}\\
\alpha^3 &= 1\\
\alpha &= 1\\
\frac{k-1}{2} &= 1\\
k &= 3
\end{aligned}$$

$\boxed{2}$ 放物線 $y=x^2-2x$ と点 $(2,1)$ を通る直線 l とで囲まれた図形についてその面積が最小になるような直線の方程式を求めよ。

—解答例—



$l: y=m(x-2)+1$ とおく。交点の x 座標を $\alpha,\beta\ (\alpha<\beta)$ とおくと α,β は $\begin{cases} y &= x^2-2x \\ y &= mx-2m+1 \end{cases}$ の解ゆえ $x^2-(m+2)x+2m-1=0$

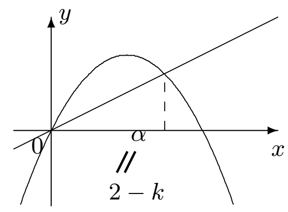
$\therefore \alpha+\beta=m+2,\ \alpha\beta=2m-1$

$$\begin{aligned}
S &= \int_{\alpha}^{\beta}\{(mx-2m+1)-(x^2-2x)\}dx\\
&= -\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)dx\\
&= \frac{(\beta-\alpha)^3}{6}=\frac{1}{6}\{(\beta-\alpha)^2\}^{\frac{3}{2}}\\
&= \frac{1}{6}\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}^{\frac{3}{2}}\\
&= \frac{1}{6}\{(m+2)^2-4(2m-1)\}^{\frac{3}{2}}\\
&= \frac{1}{6}\{m^2-4m+8\}^{\frac{3}{2}}\\
&= \frac{1}{6}\{(m-2)^2+4\}^{\frac{3}{2}} \geqq \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

$\therefore y=2(x-2)+1$ 整理して $y=2x-3$

$\boxed{3}$ 放物線 $y=-x^2+2x$ と x 軸とで囲まれた図形の面積を直線 $y=kx$ が2等分するとき k の値を求めよ。

—解答例—



図のようにおく。$\begin{cases} y &= -x^2+2x \\ y &= kx \end{cases}$ $x^2+(k-2)x=0 \therefore x\{x+(k-2)\}=0 \therefore x=0,2-k$

$\therefore 2\displaystyle\int_0^{\alpha}\{(-x^2+2x)-kx\}dx=\int_0^2(-x^2+2x)dx$

$\therefore -2\displaystyle\int_0^{\alpha}x(x-\alpha)dx=-\int_0^2 x(x-2)dx$

$\therefore 2\cdot\dfrac{\alpha^3}{6}=\dfrac{2^3}{6}$

$\therefore (2-k)^3=2^2$

$\therefore 2-k=\sqrt[3]{4}$

$k=2-\sqrt[3]{4}$

積分　No4　接線と面積

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1 曲線 $y = x^3 - x^2 - 4x \cdots$ ①　がある。

(1) 曲線上の点 $(-1, 2)$ における接線の方程式を求めよ。

—解答例—

$y' = 3x^2 - 2x - 4$ ゆえ、
$x = -1$ のときの接線の傾きは、$3(-1)^2 - 2(-1) - 4 = 1$
よって接線の方程式は、$y - 2 = 1(x + 1)$ である。
整理して $y = x + 3$

(2) ①　と (1) の接線で囲まれる部分の面積を求めよ。

—解答例—

交点を求める。

$$\begin{cases} y &= x^3 - x^2 - 4x \\ y &= x + 3 \end{cases} \text{ から}$$

$x^3 - x^2 - 5x - 3 = 0$

$\therefore (x + 1)^2(x - 3) = 0$

-1	1	-1	-5	-3
		-1	2	3
-1	1	-2	-3	$\boxed{0}$
		-1	3	
	1	-3	$\boxed{0}$	

面積 S は、

$$S = \int_{-1}^{3} \{(x + 3) - (x^3 - x^2 - 4x)\}dx = \int_{-1}^{3} (-x^3 + x^2 + 5x + 3)dx$$

$$= \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{5}{2}x^2 + 3x\right]_{-1}^{3}$$

$$= \left(-\frac{81}{4} + 9 + \frac{45}{2} + 9\right) - \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{5}{2} - 3\right)$$

$$= -20 - \cancel{\frac{1}{4}} + 18 + 22 + \cancel{\frac{1}{2}} + \cancel{\frac{1}{4}} + \frac{1}{3} - 2 - \cancel{\frac{1}{2}} + 3$$

$$= 21 + \frac{1}{3} = 21 + \frac{1}{3} = \frac{64}{3}$$

2 曲線 $y = x^3 - 9x + 3 \cdots$ ①　がある。

(1) 点 $(3, 28)$ から曲線 ①　にひいた接線 l の方程式を求めよ。

—解答例—

接点を $P(p, p^3 - 9p + 3)$ とおく。$y' = 3x^2 - 9$ ゆえ、接線の方程式は $y - (p^3 - 9p + 3) = (3p^2 - 9)(x - p)$ となり整理して、$y = (3p^2 - 9)x - 2p^3 + 3$ となる。これが点 (3,28) を通るので、

$28 = 3(3p^2 - 9) - 2p^3 + 3$

整理して $2p^3 - 9p^2 + 52 = 0$

-2	2	-9	0	52
		-4	26	-52
	2	-13	26	$\boxed{0}$

$(p + 2)(2p^2 - 13p + 26) = 0$

$D = 13^2 - 4 \cdot 2 \cdot 26 = (13 - 16) \cdot 13 < 0$ ゆえ、$p = -2$

接線の方程式は $y = 3x + 19$

(2) ①　と l で囲まれる部分の面積を求めよ。

—解答例—

交点を求める。

$$\begin{cases} y &= x^3 - 9x + 3 \\ y &= 3x + 19 \end{cases}$$

$x^3 - 12x - 16 = 0$

$\therefore (x + 2)^2(x - 4) = 0 \therefore x = -2, 4$

-2	1	0	-12	-16
		-2	4	16
-2	1	-2	-8	$\boxed{0}$
		-2	8	
	1	-4	$\boxed{0}$	

面積を S とすると、

$$S = \int_{-2}^{4} \{(3x + 19) - (x^3 - 9x + 3)\}dx = \int_{-2}^{4} (-x^3 + 12x + 16)dx$$

$$= \left[-\frac{x^4}{4} + 6x^2 + 16x\right]_{-2}^{4}$$

$$= \left(-4^3 + 6 \cdot 4^2 + 4^3\right) - \left(-4 + 24 - 32\right)$$

$$= 6 \cdot 4^2 + 12 = 6(16 + 2) = 6 \cdot 18 = 108$$

3 放物線 $y = 2x^2 - 3x + 4 \cdots$ ①　がある。

(1) 点 $(1, 1)$ から曲線 ①　にひいた 2 本の接線を求めよ。

—解答例—

接点を $(p, 2p^2 - 3p + 4)$ とおく。$y' = 4x - 3$ ゆえ、接線の方程式は $y - (2p^2 - 3p + 4) = (4p - 3)(x - p)$ である。
整理して $y = (4p - 3)x - 2p^2 + 4$ となる。
これが点 (1,1) を通るから、$1 = (4p - 3) - 2p^2 + 4$
整理して $2p^2 - 4p = 2p(p - 2) = 0 \therefore p = 0, 2$
よって、接線は $y = -3x + 4,\ y = 5x - 4$

(2) 2 本の接線と ①　で囲まれる部分の面積を求めよ。

—解答例—

$y = -3x + 4$ の接点は (0,4)
$y = 5x - 4$ の接点は (2,6) である。
この 2 接線の交点は、

$$\begin{cases} y &= -3x + 4 \\ y &= 5x - 4 \end{cases} \text{ を解いて } (x, y) = (1, 1) \text{ となる。}$$

面積を S とすると

$$S = \int_{0}^{1} \{(2x^2 - 3x + 4) - (-3x + 4)\}dx + \int_{1}^{2} \{(2x^2 - 3x + 4) - (5x - 4)\}dx$$

$$= \int_{0}^{2} (2x^2 - 3x + 4)dx - \int_{0}^{1} (-3x + 4)dx - \int_{1}^{2} (5x - 4)dx$$

$$= \left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x\right]_{0}^{2} - \left[-\frac{3}{2}x^2 + 4x\right]_{0}^{1} - \left[\frac{5}{2}x^2 - 4x\right]_{1}^{2}$$

$$= \frac{16}{3} - 6 + 8 - \left(-\frac{3}{2} + 4\right) - \left(10 - 8\right) + \left(\frac{5}{2} - 4\right)$$

$$= 5 + \frac{1}{3} + 2 + \frac{3}{2} - 4 - 2 + \frac{1}{2} - 2 = -1 + 2 + \frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

積分　No5　体積 · 速度

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿

回転体の体積 V は、回転軸に垂直な平面で切った切り口 (円) の半径を $r(x)$, 面積 (断面積) を $S(x)$ とおくと、

$$V=\int_a^b S(x)dx=\pi\int_a^b\{r(x)\}^2dx$$

$\boxed{1}$ 次の曲線または直線を (　　) 内の軸の回りに回転して得られる立体の体積を求めよ。

(1) $y=4-x^2$, x 軸　(x 軸)

—解答例—

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_{-2}^{2}y^2dx=\pi\int_{-2}^{2}(4-x^2)^2dx=\pi\int_{-2}^{2}(16-8x^2+x^4)dx\\&=\pi\left[16x-\frac{8x^3}{3}+\frac{x^5}{5}\right]_{-2}^{2}\\&=\pi\left\{\left(32-\frac{64}{3}+\frac{32}{5}\right)-\left(-32+\frac{64}{3}-\frac{32}{5}\right)\right\}\\&=2\pi\left\{\left(32-\frac{64}{3}+\frac{32}{5}\right)\right\}\\&=2\pi\left\{32-21-\frac{1}{3}+6+\frac{2}{5}\right\}\\&=2\pi\left\{17+\frac{1}{15}\right\}=\frac{512\pi}{15}\end{aligned}$$

(2) $y=4-x^2$, x 軸　(y 軸)

—解答例—

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_0^4x^2dy=\pi\int_0^4(4-y)^2dy=\pi\int_0^4(16-8y+y^2)dy\\&=\pi\left[16y-4y^2+\frac{y^3}{3}\right]_0^4\\&=\pi\left\{\left(64-64+\frac{64}{3}\right)-\left(0\right)\right\}\\&=\frac{64\pi}{3}\end{aligned}$$

(3) $y=x^2$,$y=x+2$　(x 軸)

—解答例—

$y_1=x^2$, $y_2=x+2$ とおくと、x 軸に垂直な平面で切った切り口の面積は $S(x)=\pi\{y_2\}^2-\pi\{y_1\}^2=\pi\{(x+2)^2-x^4\}=\pi(4+4x+x^2-x^4)$ ゆえ

$$\begin{aligned}V&=\int_{-1}^{2}S(x)dx=\int_{-1}^{2}(4+4x+x^2-x^4)dx\\&=\left[4x+2x^2+\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{2}\\&=\left(8+8+\frac{8}{3}-\frac{32}{5}\right)-\left(-4+2-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)\\&=16+2+\frac{2}{3}-6-\frac{2}{5}+2+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}=15-\frac{3}{5}=\frac{72}{5}\end{aligned}$$

(4) $y=2x^2$, $y=x^2+1$　(y 軸)

(5) $y=x^2-4$, $y=x+2$　(x 軸)

(6) 原点中心, 半径 4 の円　(x 軸)

ベクトル演習　No1　平面上の矢線ベクトルと成分

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

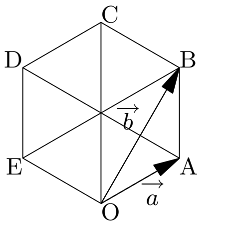
$\boxed{1}$ 下図の正六角形において、次のベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表せ。

(1) $\overrightarrow{AB} = \boxed{-\vec{a} + \vec{b}}$

(2) $\overrightarrow{OC} = \boxed{-2\vec{a} + 2\vec{b}}$

(3) $\overrightarrow{OD} = \boxed{-3\vec{a} + 2\vec{b}}$

(4) $\overrightarrow{OE} = \boxed{-2\vec{a} + \vec{b}}$



$\vec{a} = \overrightarrow{OA}$　　$\vec{b} = \overrightarrow{OB}$

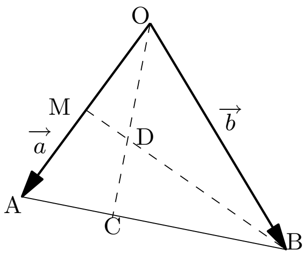
$\boxed{2}$ 次の式を満たす $\vec{x}$ を求めよ。

$\frac{1}{3}(\vec{x} - \vec{a} + 2\vec{b}) - (3\vec{a} - 2\vec{b}) = 2\vec{x} + \vec{b}$

$\vec{x} = \boxed{-2\vec{a} + \vec{b}}$

$\boxed{3}$ 次の問に答えよ。

(1) $\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{OD}$ を、$\vec{a} = \overrightarrow{OA}$,$\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ を用いて表せ。



AC : CB = 2 : 3
OM : MA = 1 : 1
MD : DB = 1 : 3

—解答例—

$\overrightarrow{OC} = \frac{3\vec{a} + 2\vec{b}}{5}$ //

$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM} = \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$ //

$\overrightarrow{OD} = \frac{3\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OB}}{4}$

$= \frac{3 \cdot \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}}{4}$

$= \frac{3\vec{a} + 2\vec{b}}{8}$ //

(2) O , D , C は一直線上にあることを示せ。

—解答例—

$\overrightarrow{OD} = \frac{3\vec{a} + 2\vec{b}}{8}$

$= \frac{5}{8}\frac{3\vec{a} + 2\vec{b}}{5}$

$= \frac{5}{8}\overrightarrow{OC}$

よって O , D , C は一直線上にある //

(3) OD : DC を求めよ。

—解答例—

$\overrightarrow{OD} = \frac{5}{8}\overrightarrow{OC}$　より

D は線分ＯＣを 5：3 に内分する。

$\therefore$ OD : DC=5：3 //

$\boxed{4}$ $\vec{a} = (2,4)$, $\vec{b} = (-1,-3)$, $\vec{c} = (-3,2)$ がある。

(1) $2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c}$ の成分を求めよ。

—解答例—

$2\vec{a} - \vec{b} + 3\vec{c} = 2(2,4) - (-1,-3) + 3(-3,2)$

$= (4,8) + (1,3) + (-9,6)$

$= (-4,\ 17)$ //

(2) $k\vec{a} + l\vec{b} = \vec{c}$ を満たす実数 k , l を求めよ。

—解答例—

$k(2,4) + l(-1,-3) = (-3,2)$

$(2k - l, 4k - 3l) = (-3,2)$

$$\begin{cases} 2k - l = -3 \\ 4k - 3l = 2 \end{cases}$$

これを解いて $\therefore k = -\frac{11}{2},\ l = -8$ //

(3) $\vec{a} + t\vec{b}$ // $\vec{b} + \vec{c}$ となる実数 t を求めよ。

—解答例—

$\vec{a} + t\vec{b} = (2,4) + t(-1,-3) = (2-t,\ 4-3t)$

$\vec{b} + \vec{c} = (-1,-3) + (-3,2) = (-4,\ -1)$

$\vec{a} + t\vec{b}$ // $\vec{b} + \vec{c}$ より $\vec{a} + t\vec{b} = s(\vec{b} + \vec{c})$ (s：実数)

$(2-t,\ 4-3t) = s(-4,\ -1)$

$$\begin{cases} 2 - t = -4s \\ 4 - 3t = -s \end{cases}$$

これを解いて $\therefore t = \frac{14}{11}$ //

$\boxed{5}$ $\vec{a} = (3,-2)$, $\vec{b} = (-1,1)$ とし、$\vec{c} = \vec{a} + k\vec{b}$ とする。

(1) $2\vec{a} + \vec{b}$ の大きさを求めよ。

—解答例—

$2\vec{a} + \vec{b} = (5,\ 3)$

$\therefore |2\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34}$ //

(2) $|\vec{c}|$ の最小値と、そのときの k の値を求めよ。

—解答例—

$\vec{c} = \vec{a} + k\vec{b} = (3,-2) + k(-1,1) = (3-k,\ k-2)$

$|c|^2 = (3-k)^2 + (k-2)^2$

$= 2k^2 - 10k + 13$

$= 2(k - \frac{5}{2})^2 + \frac{1}{2}$

$\therefore$ 実数 $k = \frac{5}{2}$ のとき, $|c|$ は最小値 $\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ をとる。 //

(3) $\vec{a}$ と同じ向きの単位ベクトル $\vec{e}$ を求めよ。

—解答例—

$|\vec{a}|^2 = 3^2 + (-2)^2 = 13$ $\therefore |\vec{a}| = \sqrt{13}$

$\vec{e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{\sqrt{13}}(3,\ -2) = \left(\frac{3}{\sqrt{13}},\ -\frac{2}{\sqrt{13}}\right)$ //

ベクトル演習　No2　平面ベクトルの内積

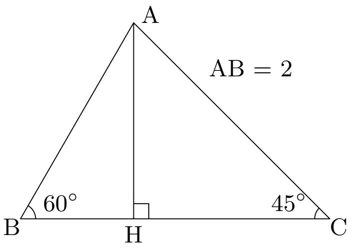
＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ 下図において、次の内積を求めよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AH}} = \boxed{3}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \boxed{0}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \boxed{\sqrt{6}+3\sqrt{2}}$



$\boxed{2}$ $\vec{a} = (-1,2)$, $\vec{b} = (1,3)$ がある。$\vec{a}+t\vec{b}$ と $\vec{b}$ が垂直となるように実数 t を求めよ。

—解答例—

$(\vec{a}+t\vec{b})\cdot\vec{b} = (-1+t, 2+3t)\cdot(1,3) = (-1+t)+(6+9t) = 5+10t = 0$

$\therefore t = -\dfrac{1}{2}$

$\boxed{3}$ A$(4,5)$, B$(-2,1)$, C$(1,-1)$ がある。

(1) 次のベクトルの成分を求めよ。

$\overrightarrow{\mathrm{BA}} = \boxed{(6,4)}$　　$\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \boxed{(3,-2)}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ のなす角を θ とするとき、$\cos\theta$ を求めよ。

—解答例—

$$\cos\theta = \frac{(6,4)\cdot(3,-2)}{|(6,4)|\cdot|(3,-2)|} = \frac{2(3,2)\cdot(3,-2)}{2|(3,2)|\cdot|(3,-2)|} = \frac{9-4}{\sqrt{9+4}\cdot\sqrt{9+4}} = \frac{5}{13}$$

(3) $\triangle$ABC の面積を求めよ。

—解答例—

$$\triangle\mathrm{ABC} = \frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|\cdot|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|\cdot\sin\angle\mathrm{ABC} = \frac{1}{2}|(6,4)|\cdot|(3,-2))|\cdot\sin\theta$$

$$= \frac{1}{2}2|(3,2)|\cdot|(3,-2))|\cdot\sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{9+4}\cdot\sqrt{9+4}\sqrt{1-\frac{25}{169}}$$

$$= 13\cdot\sqrt{\frac{144}{169}} = 13\cdot\frac{12}{13} = 6$$

$\boxed{4}$ $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{a}-\vec{b}| = \sqrt{19}$ であるとき、

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

—解答例—

$19 = |\vec{a}-\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2 = 9 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + 4$

$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b} = -3$

(2) $\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

—解答例—

$\cos\theta = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \dfrac{-3}{3\cdot 2} = -\dfrac{1}{2}$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ ゆえ $\theta = 120^\circ$

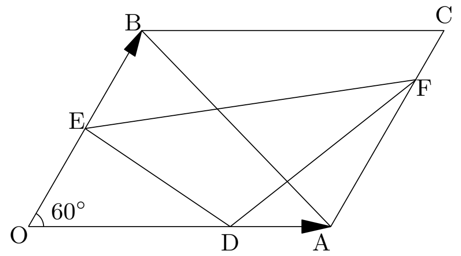
(3) $|2\vec{a}+\vec{b}|$ を求めよ。

—解答例—

$|2\vec{a}+\vec{b}|^2 = 4|\vec{a}|^2 + 4\vec{a}\cdot\vec{b} + |\vec{b}|^2 = 36 - 12 + 4 = 28$

$\therefore |2\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$

$\boxed{5}$ 下図において、次の問に答えよ。



OA = 4 , OB = 3

$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$

OE : EB = 1 : 1

OD : DA = 2 : 1

AF : FC = 3 : 1

(1) $\overrightarrow{\mathrm{DE}}$, $\overrightarrow{\mathrm{DF}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ で表せ。

—解答例—

$\overrightarrow{\mathrm{DE}} = \overrightarrow{\mathrm{OE}} - \overrightarrow{\mathrm{OD}} = \dfrac{1}{2}\vec{b} - \dfrac{2}{3}\vec{a} = -\dfrac{2}{3}\vec{a} + \dfrac{1}{2}\vec{b}$

$\overrightarrow{\mathrm{DF}} = \overrightarrow{\mathrm{DA}} + \overrightarrow{\mathrm{AF}} = \dfrac{1}{3}\vec{a} + \dfrac{3}{4}\vec{b}$

(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

—解答例—

$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos 60^\circ = 4\cdot 3\cdot\dfrac{1}{2} = 6$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{DE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DF}}$ を求めよ。

—解答例—

$$与式 = \left(-\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b}\right)$$

$$= -\frac{2}{9}|\vec{a}|^2 - \frac{1}{3}\vec{a}\cdot\vec{b} + \frac{3}{8}|\vec{b}|^2$$

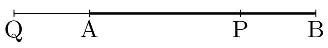
$$= -\frac{32}{9} - 2 + \frac{27}{8} = -3 - \frac{5}{9} - 2 + 3 + \frac{3}{8}$$

$$= -2 + \frac{-40+27}{72} = -\frac{301}{72}$$

ベクトル演習　No3　ベクトルと平面図形 (1)

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ 線分 AB を 2 : 1 に内分する点 P, 1 : 3 に外分する点 Q を図示せよ。



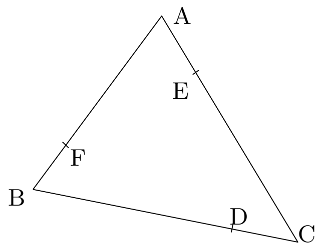
次に、$A(\overrightarrow{a}), B(\overrightarrow{b}), P(\overrightarrow{p}), Q(\overrightarrow{q})$ とするとき、$\overrightarrow{p}, \overrightarrow{q}$ を $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}$ で表せ。

—解答例—

$\overrightarrow{p} = \dfrac{\overrightarrow{a} + 2\overrightarrow{b}}{3}, \ \overrightarrow{q} = \dfrac{3\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}}{-1+3} = \dfrac{3\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}}{2}$

$\boxed{2}$ $A(\overrightarrow{a}), B(\overrightarrow{b}), C(\overrightarrow{c}), D(\overrightarrow{d}), E(\overrightarrow{e}), F(\overrightarrow{f})$ とするとき、次の問に答えよ。

(1) $\overrightarrow{d}, \overrightarrow{e}, \overrightarrow{f}$ を $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}$ で表せ。



BD : DC = 3 : 1
CE : EA = 3 : 1
AF : FB = 3 : 1

—解答例—

$\overrightarrow{d} = \dfrac{\overrightarrow{b} + 3\overrightarrow{c}}{4}, \ \overrightarrow{e} = \dfrac{\overrightarrow{c} + 3\overrightarrow{a}}{4}, \ \overrightarrow{f} = \dfrac{\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}}{4}$

(2) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{0}$ を証明せよ。

—解答例—

$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{d} - \overrightarrow{a} + \overrightarrow{e} - \overrightarrow{b} + \overrightarrow{f} - \overrightarrow{c}$

$= \dfrac{\overrightarrow{b} + 3\overrightarrow{c}}{4} - \overrightarrow{a} + \dfrac{\overrightarrow{c} + 3\overrightarrow{a}}{4} - \overrightarrow{b} + \dfrac{\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}}{4} - \overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}$

(3) △ABC と △DEF の重心を、それぞれ $G(\overrightarrow{g})$, $G'(\overrightarrow{g'})$ とするとき、G と G′ は一致することを示せ。

—解答例—

$\overrightarrow{g'} = \dfrac{\overrightarrow{d} + \overrightarrow{e} + \overrightarrow{f}}{3}$

$= \dfrac{\dfrac{\overrightarrow{b} + 3\overrightarrow{c}}{4} + \dfrac{\overrightarrow{c} + 3\overrightarrow{a}}{4} + \dfrac{\overrightarrow{a} + 3\overrightarrow{b}}{4}}{3} = \dfrac{\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}}{3} = \overrightarrow{g}$

よって G=G′ である。

$\boxed{3}$ △ABC において、次の問に答えよ。

(1) $\overrightarrow{AP} = \dfrac{2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}}{5}$ であるとき、P はどんな点か。

—解答例—

P は線分 BC を 3 : 2 に内分する点である。

(2) $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{BA}$ が成り立つとき、 P はどんな点か。

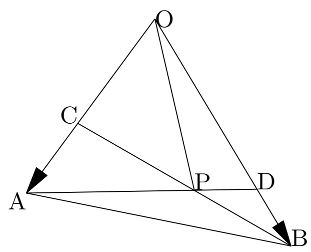
—解答例—

$-\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AP} = -\overrightarrow{AB}$

$\therefore \overrightarrow{AP} = \dfrac{2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{3}$

∴ 点 P は線分 BC を 1 : 2 に内分する点である。

$\boxed{4}$ 線分 CB と AD の交点を P とする。$\overrightarrow{OP}$ を $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{b} = \overrightarrow{OB}$ で表せ。



$OC : CA = 3 : 2$
$OD : DB = 3 : 1$

—解答例—

AP : PD $= 1 - t : t$, BP : PC $= 1 - s : s$ とおく。

$\overrightarrow{OP} = t\overrightarrow{OA} + (1-t)\overrightarrow{OD} = t\overrightarrow{OA} + \dfrac{3}{4}(1-t)\overrightarrow{OB}$

$\qquad = (1-s)\overrightarrow{OC} + s\overrightarrow{OB} = \dfrac{3}{5}(1-s)\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ は一次独立ゆえ $\begin{cases} t & = \dfrac{3}{5}(1-s) \\ \dfrac{3}{4}(1-t) & = s \end{cases}$

これを解いて、$t = \dfrac{3}{11}, s = \dfrac{6}{11}$ ゆえ $\overrightarrow{OP} = \dfrac{3}{11}\overrightarrow{OA} + \dfrac{6}{11}\overrightarrow{OB}$

—ちょっと別解—

AP : PD $= 1 - p : p$ とおくと、$\overrightarrow{OP} = (1-p)\overrightarrow{OA} + p\dfrac{3}{4}\overrightarrow{OB} = \dfrac{5}{3}(1-p)\overrightarrow{OC} + \dfrac{3}{4}p\overrightarrow{OB}$ となる。P は直線 BC 上にあるから $\dfrac{5}{3}(1-p) + \dfrac{3}{4}p = 1$ である。これから$\overrightarrow{OP}$がわかる。

ベクトル演習　No3.5　ベクトルと平面図形 (2)

____ 組 ____ 番　氏名 ____________________

$\boxed{1}$ △ABCと点Pに対して、次の等式が成り立つとき、点Pの位置をいえ。

$$5\overrightarrow{\mathrm{AP}}+4\overrightarrow{\mathrm{BP}}+3\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\overrightarrow{0}$$

—解答例—

$$5\overrightarrow{\mathrm{AP}}+4(\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}})+3(\overrightarrow{\mathrm{CA}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}})=\overrightarrow{0}$$

$$\begin{aligned}12\overrightarrow{\mathrm{AP}} &= 4\overrightarrow{\mathrm{AB}}+3\overrightarrow{\mathrm{AC}}\\ \overrightarrow{\mathrm{AP}} &= \frac{7}{12}\cdot\frac{4\overrightarrow{\mathrm{AB}}+3\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{7}\end{aligned}$$

線分 BC を 3 : 4 に内分した点を Q とすると、$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{7}{12}\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ ゆえ P は AQ を 7 : 5 に内分した点である。

$\boxed{2}$ 点 A(1,2), 直線 $l: 2x-3y+6=0$ について、次の問いに答えよ。

(1) l の法線ベクトル $\overrightarrow{n}$ の 1 つを求めよ。

—解答例—

$\overrightarrow{n}=(2,-3)$

(2) A を通り、l に平行な直線の方程式を求めよ。

—解答例—

$2(x-1)-3(y-2)=0$

$\therefore 2x-3y+4=0$

$\boxed{3}$ 平面上の 2 定点 O, A と動点 P に対し、次のベクトル方程式で表される円の中心の位置と半径を求めよ。

(1) $|2\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=4$

—解答例—

$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|=2$

$\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA'}}$ とおくと、A' は OA の中点であり、$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA'}}|=2$ ゆえ A'(OA の中点) が中心で、半径は 2 である。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-2\overrightarrow{\mathrm{OA}})=0$

—解答例—

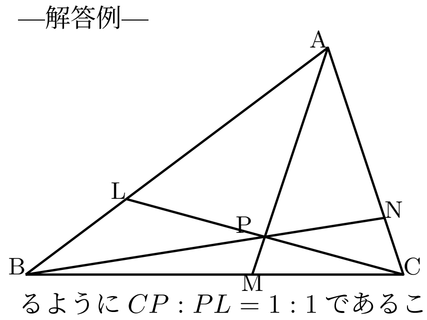
$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0 \therefore |\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}+|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2$

$\therefore |\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|$ よって A が中心で、OA の長さが半径である。

$2\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA'}}$ とするとき $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{A'P}}$ ゆえ OA' を直径とする円になる。これを使って答えるのも良い。

$\boxed{4}$ P を △ABCの内部の点とし、△BPC, △CPA, △APB の面積の比が 1 : 2 : 3 になるものとする。このとき、$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$を$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で表せ。

—解答例—



普通は BM : MC = 3 : 2, CN : NA = 1 : 3, AL : LB = 2 : 1 がわかるので、$BP : PN = s : 1-s$, $CP : PL = t : 1-t$ とおいてやるが、実は下にあるように $CP : PL = 1 : 1$ であることがすぐわかるのでもっと簡単に計算できる。

$BM : MC = \triangle\mathrm{ABP} : \triangle\mathrm{ACP} = 3 : 2$

$AL : LB = \triangle\mathrm{ACP} : \triangle\mathrm{BCP} = 2 : 1$

$\therefore \triangle\mathrm{ALP} : \triangle\mathrm{BLP} = 2 : 1$

$\therefore LP : PC = 1 : 1$

よって $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AN}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{2}=\dfrac{\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{2}=\dfrac{2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+3\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{6}$

$\boxed{5}$ 原点を O とする xy 平面上を動く点 P があり、その位置ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$を、$\overrightarrow{a}=(3,-1)$, $\overrightarrow{b}=(2,1)$ を用いて、$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{a}+t\overrightarrow{b}$ と表すとする。ただし s, t はそれぞれ $s+t\leqq 2$, $s\geqq 0$, $t\geqq 0$ を満たす実数である。

(1) 点 P が存在する範囲を図示せよ。

—解答例—

$\dfrac{s}{2}+\dfrac{t}{2}\leqq 1$, $\dfrac{s}{2}\geqq 0$, $\dfrac{t}{2}\geqq 0$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{s}{2}(6,-2)+\dfrac{t}{2}(4,2)$

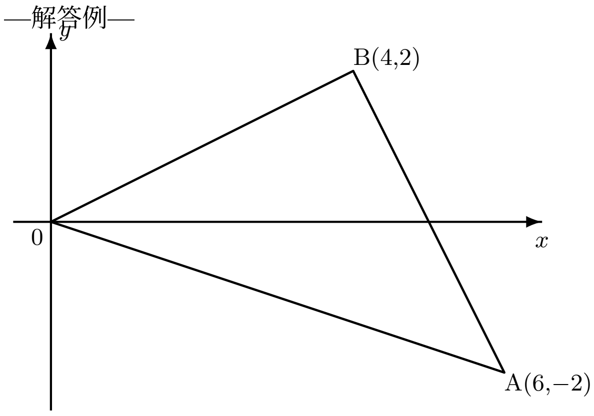
ゆえ、3 点 (0,0), (6,−2), (4,2) で囲まれた三角形の内部および周である。

(図は省略)

$P(x,y)$ とおいて座標を計算する方法もある。

(2) 点 P が存在する範囲の面積を求めよ。

—解答例—



$S=\dfrac{1}{2}|6\times 2-(-2)\times 4|=10$

ベクトル演習　No4　空間の成分・内積

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ 3 点 A$(2,-3,1)$, B$(-4,0,2)$, C$(5,3,0)$ について次のものを求めよ。

(1) 線分 AB を 3 : 2 に内分する点　$\boxed{\left(-\frac{8}{5},-\frac{6}{5},\frac{8}{5}\right)}$

(2) 線分 AB を 1 : 2 に外分する点　$\boxed{(8,-6,-1)}$

(3) $\triangle$ABC の重心　$\boxed{(1,0,1)}$

(4) 点 C の点 A に関する対称点

—解答例—

求める点を P(x,y,z) とおくと

A は線分 PC の中点ゆえ $\dfrac{(x,y,z)+(5,3,0)}{2}=(2,-3,1)$

よって、$(x,y,z)=(-1,-9,2)$

$\boxed{2}$ $A(2,1,3),\ B(4,2,3),\ C(1,3,5)$ を頂点とする三角形はどんな三角形か

—解答例—

$AB=\sqrt{2^2+1^2+0^2}=\sqrt{5},$

$BC=\sqrt{3^2+1^2+2^2}=\sqrt{14},$

$CA=\sqrt{1^2+2^2+2^2}=3$

$\therefore AB^2+CA^2=BC^2$

よって $A=90^\circ$ の直角三角形

$\boxed{3}$ $A(6,5,3),\ B(5,-2,5)$ から等距離にあるような x 軸上の点を求めよ。

—解答例—

$P(x,0,0)$ とする。

$AP^2=BP^2$ から

$(x-6)^2+\cancel{5^2}+3^2=(x-5)^2+2^2+\cancel{5^2}$

これを解いて、$x=8$

よって (8,0,0)

$\boxed{4}$ $\vec{a}=(1,0,1),\ \vec{b}=(0,1,0),\ \vec{c}=(1,2,3)$ に対し

(1) $|2\vec{b}-3\vec{c}|$ を求めよ。

—解答例—

$|2\vec{b}-3\vec{c}|=|2(0,1,0)-3(1,2,3)|=|(-3,-4,-9)|=\sqrt{106}$

(2) $\vec{a}-\vec{c}$ と同じ向きの単位ベクトルを求めよ。

—解答例—

$\vec{a}-\vec{c}=(1,0,1)-(1,2,3)=(0,-2,-2)$

$|\vec{a}-\vec{c}|=2\sqrt{2}$

よって求めるベクトルは

$\dfrac{1}{2\sqrt{2}}(0,-2,-2)=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1)$

(3) $\vec{p}=(4,0,6)$ を $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ を用いて表せ。

—解答例—

$(4,0,6)=l(1,0,1)+m(0,1,0)+n(1,2,3)$ とおくと、

$$\begin{cases} 4 &= l+n \\ 0 &= m+2n \\ 6 &= l+3n \end{cases}$$

これを解いて $l=3,\ m=-2,\ n=1$ ゆえ

$\vec{p}=3\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}$

$\boxed{5}$ $\vec{a}=(2,-2,1),\ \vec{b}=(2,3,-4)$ とする。$\vec{c}=\vec{b}-k\vec{a}$ が $\vec{a}$ と直交するときの k の値、$\vec{c}$ を求めよ。

—解答例—

$0=\vec{c}\cdot\vec{a}=(\vec{b}-k\vec{a})\cdot\vec{a}=\vec{b}\cdot\vec{a}-k|\vec{a}|^2$

$\quad=(2,-2,1)\cdot(2,3,-4)-k|(2,-2,1)|^2=-6-9k$

$\therefore k=-\dfrac{2}{3}$

よって $\vec{c}=(2,3,-4)+\dfrac{2}{3}(2,-2,1)=\left(\dfrac{10}{3},\dfrac{5}{3},-\dfrac{10}{3}\right)$

$\boxed{6}$ $A(-1,5,1),\ B(x,-1,4),\ C(3,-3,z)$ が同一直線上にあるとき、$x,\ z$ を求めよ。

—解答例—

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(x+1,-6,3),\ \overrightarrow{\mathrm{AC}}=(4,-8,z-1)$

これが平行なので、$8(x+1,-6,3)=6(4,-8,z-1)$

よって、$x=2,\ z=5$

$\boxed{7}$ 3 点 $A(0,1,1),\ B(-1,-1,2),\ C(2,3,1)$ がある。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を求めよ。

—解答例—

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-1,-2,1)\cdot(2,2,0)=-6$

(2) $\cos\angle\mathrm{BAC}$ を求めよ。

—解答例—

$\cos\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|}=\dfrac{-6}{\sqrt{6}\cdot2\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0^\circ<\angle\mathrm{BAC}<180^\circ$ ゆえ $\angle\mathrm{BAC}=150^\circ$

(3) $\triangle$ABC の面積を求めよ。

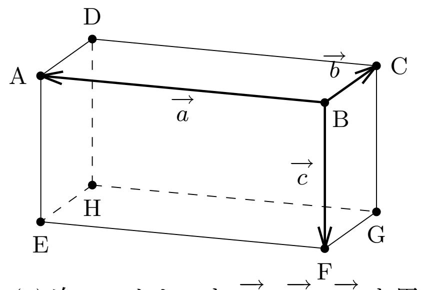
—解答例—

$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot AB\cdot AC\sin\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{6}\cdot2\sqrt{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\sqrt{3}$

ベクトル演習　No5　矢線ベクトル・内積

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

8 下図において、次の問に答えよ。



(1) 次のベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。

$\overrightarrow{\mathrm{HF}} = \boxed{-\vec{a} - \vec{b}}$

$\overrightarrow{\mathrm{BH}} = \boxed{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}$

$\overrightarrow{\mathrm{EC}} = \boxed{-\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}}$

(2) △AFC の重心を K とするとき、$\overrightarrow{\mathrm{BK}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表せ。

$\overrightarrow{\mathrm{BK}} = \boxed{\dfrac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}}$

(3) 3 点 B , K , H は同一直線上にあることを示せ。

—解答例—

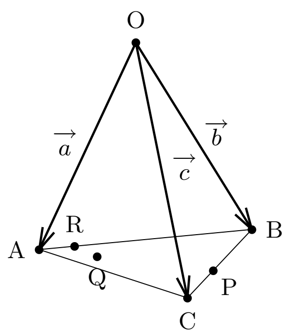
$3\overrightarrow{\mathrm{BK}} = \overrightarrow{\mathrm{BH}}$ ゆえ

3 点 B, K, H は一直線上にある。

このとき、

$\mathrm{BK} : \mathrm{KH} = \boxed{1 : 3}$

9 下図において、次の問に答えよ。



AR : RB = 1 : 5
BP : PC = 3 : 2
PQ : QA = 2 : 1

(1) 次のベクトルを $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表せ。

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \boxed{\dfrac{2\vec{b} + 3\vec{c}}{5}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \boxed{\dfrac{10\vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c}}{15}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \boxed{\dfrac{5\vec{a} + \vec{b}}{6}}$

$\overrightarrow{\mathrm{CQ}} = \boxed{\dfrac{10\vec{a} + 2\vec{b} - 12\vec{c}}{15}}$

$\overrightarrow{\mathrm{CR}} = \boxed{\dfrac{5\vec{a} + \vec{b} - 6\vec{c}}{6}}$

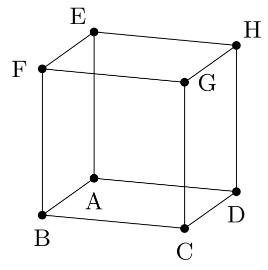
(2) 3 点 C , Q , R は同一直線上にあることを示せ。

—解答例—

$15\overrightarrow{\mathrm{CQ}} = 12\overrightarrow{\mathrm{CR}}$ ゆえ $\overrightarrow{\mathrm{CQ}} /\!/ \overrightarrow{\mathrm{CR}}$

よって 3 点 C, Q, R は同一直線上にある。

10 一辺の長さが l の立方体がある。次の内積を求めよ。



(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}$

—解答例—

与式 $= l \cdot \sqrt{2}l \cos 45^\circ = l^2$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BG}}$

—解答例—

与式 $= 0$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{BG}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{HE}}$

—解答例—

与式 $= \sqrt{2}l \cdot l \cos 135^\circ = -l^2$

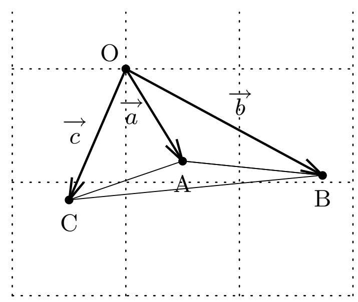
(4) $\overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AG}}$

—解答例—

与式 $= |\overrightarrow{\mathrm{AC}}| \cdot (|\overrightarrow{\mathrm{AG}}| \cos\angle\mathrm{GAC})$

$= |\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 = (\sqrt{2}l)^2 = 2l^2$

11 次の問に答えよ。



$\mathrm{OA} = 1,\ \mathrm{OB} = 2,\ \mathrm{OC} = \sqrt{2}$
$\angle AOB = 60^\circ,\ \angle AOC = 45^\circ,$
$\angle BOC = 90^\circ$

(1) △ABC の重心を G とする。$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表すと

$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \boxed{\dfrac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}}$

(2) BC を $t : 1-t$ に内分する点を P とする。$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表すと $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \boxed{-\vec{a} + (1-t)\vec{b} + t\vec{c}}$

(3) 次の内積を求めよ。

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \boxed{1}$

$\vec{b} \cdot \vec{c} = \boxed{0}$

$\vec{c} \cdot \vec{a} = \boxed{1}$

(4) $\overrightarrow{\mathrm{OG}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AP}}$ となるときの t の値、$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を求めよ。

—解答例—

$0 = (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (-\vec{a} + (1-t)\vec{b} + t\vec{c}) = \cdots = -2t + 2$

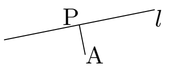
$\therefore t = 1,\ \overrightarrow{\mathrm{AP}} = -\vec{a} + \vec{c}$

ベクトル演習　No6　空間図形とベクトル方程式

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

点と直線の距離

動点 P が直線 l 上を動くとき、AP の最小値を点 A と直線 l との距離という。このとき、AP$\perp l$ となり、P は A から l に下ろした垂線の足となる。



$\boxed{1}$ 方向ベクトルが (3,2,−1) で点 (4,3,0) を通る直線 l について

(1) ベクトル方程式を求めよ。

—解答例—

$(x,y,z)=(4,3,0)+t(3,2,-1)$

(2) l 上の動点 P の座標をパラメータ（媒介変数） t を用いて表せ。

—解答例—

(1) から $(x,y,z)=(3t+4,2t+3,-t)$ ゆえ

$$\begin{cases} x &= 3t+4 \\ y &= 2t+3 \\ z &= -t \end{cases}$$

$\boxed{2}$ 2 点 (1,2,3), (−1,4,2) を通る直線 g について

(1) ベクトル方程式を求めよ。

—解答例—

点 $(1,2,3)$ を通り、$(1,2,3)-(-1,4,2)=(2,-2,1)$ を方向ベクトルに持つ直線ゆえ

$(x,y,z)=(1,2,3)+s(2,-2,1)$

(2) g 上の動点 Q の座標をパラメータ s を用いて表せ。

—解答例—

(1) より $(x,y,z)=(2s+1,-2s+2,s+3)$ ゆえ

$$\begin{cases} x &= 2s+1 \\ y &= -2s+2 \\ z &= s+3 \end{cases}$$

$\boxed{3}$ 点 A(3,2,1) と直線 l の距離を求めたい。

(1) AP の最小値を求めることにより、点 A と直線 l の距離を求めよ。

—解答例—

$AP^2=(3t+4-3)^2+(2t+3-2)^2+(-t-1)^2$

$=(3t+1)^2+(2t+1)^2+(t+1)^2=14t^2+12t+3$

$=14\left(t^2+\dfrac{6}{7}t\right)+3$

$=14\left\{\left(t+\dfrac{3}{7}\right)^2-\dfrac{9}{49}\right\}+3=14\left(t+\dfrac{3}{7}\right)^2+\dfrac{3}{7}$

よって距離は $\sqrt{\dfrac{3}{7}}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と直線 l の方向ベクトルが直交することを用いて、点 A と直線 l の距離を求めよ。

—解答例—

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(3t+4,2t+3,-t)-(3,2,1)=(3t+1,2t+1,-t-1)$

これが $(3,2,-1)$ と直交するので、

$(3t+1,2t+1,-t-1)\cdot(3,2,-1)=0$

$\therefore 3(3t+1)+2(2t+1)+(t+1)=14t+6=0$

これを解いて、$t=-\dfrac{3}{7}$

直線 l と点 A の距離は $AP=|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=\left|\left(-\dfrac{2}{7},\dfrac{1}{7},-\dfrac{4}{7}\right)\right|$

$=\dfrac{1}{7}|(-2,1,-4)|=\dfrac{\sqrt{4+1+16}}{7}=\dfrac{21}{7}$

$\boxed{4}$ 直線 l と平面の交点を求めたい。

(1) 直線 l と xy 平面との交点は、z 座標が $\boxed{0}$ である。交点を求めよ。

—解答例—

$z=-t=0$ ゆえ、$t=0$

よって、交点は $(x,y,z)=(4,3,0)$

(2) 3 点 B(1,0,0), C(0,1,0), D(0,0,1) を通る平面 BCD と直線 l の交点を P とすると、4 点 P, B, C, D が同一平面上にある。交点を求めよ。

—解答例—

3 点 B,C,D は同一直線上にない ($\overrightarrow{\mathrm{BC}}$,$\overrightarrow{\mathrm{BD}}$は一次独立ゆえ) から

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=a\overrightarrow{\mathrm{OB}}+b\overrightarrow{\mathrm{OC}}+c\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ と書ける。

$(3t+4,2t+3,-t)=a(1,0,0)+b(0,1,0)+c(0,0,1)$, $(a+b+c=1)$

ゆえ $3t+4=a$, $2t+3=b$, $-t=c$, $a+b+c=1$ となる。これを解いて、$t=-\dfrac{3}{2}$ であるから、$(3t+4,2t+3,-t)=\left(-\dfrac{1}{2},0,\dfrac{3}{2}\right)$ が点 P の座標である。

$\boxed{5}$ 直線 l と直線 g の最短距離を求めたい。

(1) PQ の最小値を求めることにより最短距離を求めよ。

—解答例—

$PQ^2=|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2=|(2s+1,-2s+2,s+3)-(3t+4,2t+3,-t)|^2=|(2s-3t-3,-2s-2t-1,s+t+3)|^2=(2s-3t-3)^2+(2s+2t+1)^2+(s+t+3)^2=9s^2-2st+14t^2-2s+28t+19=9s^2-2(t+1)s+14t^2+28t+19=9\left(s-\dfrac{t+1}{9}\right)^2+\dfrac{125(t+1)^2}{9}+5$

よって最短距離は $\sqrt{5}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\perp l$, $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\perp g$ により、最短距離を求めよ。

—解答例—

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot(3,2,-1)=(2s-3t-3,-2s-2t-1,s+t+3)\cdot(3,2,-1)=s-14t-14=0$

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot(2,-2,1)=(2s-3t-3,-2s-2t-1,s+t+3)\cdot(2,2,-1)=-s-11t-11=0$

これを解いて、$(s,t)=(0,-1)$ ゆえ最短距離は

$PQ=|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=|(0,1,2)|=\sqrt{5}$

数列演習　No1　等差数列

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ 次の等差数列の一般項と、初項から第 n 項までの和を求めよ。

(1) $6, 13, 20, 27, 34, \cdots$

—解答例—

一般項は $6+(n-1)7=7n-1$

和は $\dfrac{n\{2\cdot 6+(n-1)7\}}{2}$

$=\dfrac{n(7n+5)}{2}$

(2) $1,\ \dfrac{1}{4},\ -\dfrac{1}{2}\ ,\ -\dfrac{5}{4}\ ,\ \cdots$

—解答例—

一般項は $1+(n-1)\cdot\left(-\dfrac{3}{4}\right)$

$=-\dfrac{3}{4}n+\dfrac{7}{4}$

和は

$\dfrac{n\left\{2\cdot 1+(n-1)\cdot\left(-\dfrac{3}{4}\right)\right\}}{2}$

$=\dfrac{-n(3n-11)}{8}$

$\boxed{2}$ 第 9 項が 13 第 17 項が 29 である等差数列がある。

(1) 一般項 a_n を求めよ。

—解答例—

初項を a, 公差を d とすると

$\begin{cases} a_9 &= a+8d=13 \\ a_{17} &= a+16d=29 \end{cases}$

これをといて、$d=2,\ a=-3$

$\therefore a_n=-3+(n-1)2=2n-5$

(2) 99 はこの数列の第何項か

—解答例—

$a_n=2n-5=99$ とおくと

$n=\dfrac{104}{2}=52$

よって、第 52 項である。

(3) 初項から第 n 項までの和を求めよ

—解答例—

$S_n=\dfrac{n\{6+(n-1)2\}}{2}=n(n-4)$

(4) 第 10 項から第 30 項までの和を求めよ

—解答例—

$S_{30}-S_9=30(30-4)-9(9-4)=15(52-3)=15\times 49=735$

$\boxed{3}$ 等差数列 10 , 7 , 4 , $\cdots$ の第 n 項までの和が -165 である。このときの n の値を求めよ。

—解答例—

$\dfrac{n\{20-(n-1)3\}}{2}=-165$ ゆえ $n(23-3n)=-330$

$\therefore 3n^2-23n-330=(3n+22)(n-15)=0$

n は自然数ゆえ $n=15$

$\boxed{4}$ 初項が 50 末項が -30 和が 210 である等差数列の公差と項数を求めよ。

—解答例—

項数を n とすると $\dfrac{n(50-30)}{2}=210$ ゆえ $n=21$

公差を d とすると $50+20d=-30$

よって $d=-4$

$\boxed{5}$ 第 8 項が 18, 第 20 項が -174 である等差数列がある。

(1) 一般項 a_n を求めよ。

—解答例—

初項を a, 公差を d とすると

$a+7d=18,\ a+19d=-174$ これをといて、$d=-16,\ a=130$ ゆえ

$a_n=130-16(n-1)=-16n+146$

(2) 第何項から負の数となるか

—解答例—

$a_n=-16n+146<0$ とすると

$n>\dfrac{146}{16}=\dfrac{73}{8}=9+\dfrac{1}{8}$

よって、第 10 項から負の数となる。

(3) 初項から第何項までの和が最大となるか。また、その最大値はいくつか

—解答例—

$a_1, a_2, \cdots, a_9>0,\ a_{10}, a_{11}, \cdots<0$ ゆえ第 9 項までの和が最大となる。

その最大値は、$\dfrac{9(a_1+a_9)}{2}=\dfrac{9(130+2)}{2}=594$

$\boxed{6}$ 1 から 100 までの自然数のうち

(1) 3 の倍数の和を求めよ。

—解答例—

$3\cdots 1,\ 3\cdot 2,\cdots,3\cdot 33(=99)$ の和を求めればよいから、

$\dfrac{33(3+99)}{2}=1683$

(2) 4 の倍数の和を求めよ。

—解答例—

$4\cdot 1, 4\cdot 2,\cdots,4\cdot 25(=100)$ の和を求めればよいから、

$\dfrac{25(4+100)}{2}=1300$

(3) 3 または 4 の倍数の和を求めよ。

—解答例—

12 の倍数の和は $12\cdot 1+12\cdot 2+\cdots+12\cdot 8=\dfrac{8(12+96)}{2}=432$

3 の倍数と 4 の倍数で共通なものは 12 の倍数ゆえ

$1683+1300-432=2551$

$\boxed{7}$ 次の問に答えよ。

(1) 7 で割ると 2 余る整数 n は、整数 t を用いて $n=\boxed{\ 7t+2\ }$ と表せる。

(2) $100\leqq n\leqq 600$ とするとき、n の総和を求めよ。

—解答例—

$100\leqq 7t+2\leqq 600$ から $\dfrac{98}{7}\leqq t\leqq\dfrac{598}{7}$ ゆえ $14\leqq t\leqq 85+\dfrac{3}{7}$ となるので $14\leqq t\leqq 85$

求める総和は、初項は $14\cdot 7+2=100$, 末項は $85\cdot 7+2=597$, 項数は $85-14+1=72$ の等差数列の和ゆえ $\dfrac{72(100+597)}{2}=25092$

$\boxed{8}$ 等差数列をなす 3 数があって、和は 15 積は 80 である。この 3 数を求めよ。

—解答例—

求める 3 数を a,b,c とおき、この順に等差数列であるとすると

$a+b+c=15, abc=80, 2b=a+c$ となる。

これから $b=5,\ a+c=10,\ ac=16$

これをといて、求める 3 数は 2 と 5 と 8

$\boxed{9}$ 一般項 a_n が $a_n=pn+q$ で表される数列は等差数列であることを証明せよ。

—解答例—

$a_{n+1}-a_n=\{p(n+1)+q\}-(pn+q)=p=$ 一定

よって $\{a_n\}$ は等差数列である。

数列演習　No2　等比数列

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1 次の等比数列の一般項、および初項から第 n 項までの和を求めよ。

(1) $-3,\ -6,\ -12,\ \cdots$

—解答例—

一般項は $-3\cdot 2^{n-1}$

和は $\dfrac{-3(2^n-1)}{2-1}$

$= -3(2^n-1)$

(2) $2,\ -6,\ 18,\ \cdots$

—解答例—

一般項は $2\cdot(-3)^{n-1}$

和は $\dfrac{2\{(-3)^n-1\}}{(-3)-1}$

$-\dfrac{1}{2}\{(-3)^n-1\}$

2 等比数列の第5項が -48, 第8項が384であるとき

(1) 一般項 a_n を求めよ。

—解答例—

初項を a, 公比を r とおくと

$a_5=ar^4=-48,\ a_8=ar^7=384$

$384=ar^7=ar^4\cdot r^3=-48r^3$ ゆえ $r^3=-8$ となる。r は実数ゆえ、これを解いて $r=-2$,$a=-3$

$\therefore a_n=-3\cdot(-2)^{n-1}$

(2) -12288 は第何項の数か。

—解答例—

$a_n=-3\cdot(-2)^{n-1}=-12288$ とおくと、$(-2)^{n-1}=4096=2^{12}=(-2)^{13-1}$

よって、$n=13$

(3) 初項から第 n 項までの和を求めよ。

—解答例—

$\dfrac{-3\{(-2)^n-1\}}{(-2)-1}=(-2)^n-1$

3 各項が実数である等比数列において、初項から第10項までの和が1, 初項から第20項までの和が3であるとき、初項から第30項までの和を求めよ。

—解答例—

初項を a, 公比を r とする。$r=1$ なら、$10a=1,\ 20a=3$ となり矛盾する。よって $\dfrac{a(r^{10}-1)}{r-1}=1,\ \dfrac{a(r^{20}-1)}{r-1}=3$ である。

$3=\dfrac{a(r^{20}-1)}{r-1}=\dfrac{a\{(r^{10})^2-1\}}{r-1}=\dfrac{a(r^{10}-1)(r^{10}+1)}{r-1}=r^{10}+1$

$\therefore r^{10}=2$ よって $\dfrac{a}{r-1}=1$ ゆえ

$S_{30}=\dfrac{a(r^{30}-1)}{r-1}=(r^{10})^3-1=2^3-1=7$

4 次の和を求めよ。

(1) $1+2+2^2+\cdots+2^n$

—解答例—

与式 $=\dfrac{1\cdot(2^{n+1}-1)}{2-1}$

$=2^{n+1}-1$

(2) $2+2^2+2^3+\cdots+2^n$

—解答例—

与式 $=\dfrac{2(2^n-1)}{2-1}=2(2^n-1)$

(3) $1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}$

—解答例—

与式 $=\dfrac{1\cdot(2^n-1)}{2-1}=2^n-1$

5 初項が2, 公比が2の等比数列の初項から第 n 項までの積を求めよ。

—解答例—

$2\cdot 2^2\cdot 2^3\cdots 2^n=2^{1+2+3+\cdots+n}=2^{\frac{n(n+1)}{2}}$

6 初項が 2 , 公比が 4 の等比数列がある。

(1) 一般項 a_n は、$a_n=\boxed{2\cdot 4^{n-1}}$

(2) $a_n=2^{b_n}$ とおくとき、b_n は, どんな数列をなすか。

—解答例—

$a_n=2\cdot(2^2)^{n-1}=2\cdot 2^{2(n-1)}=2^{2n-1}$

ゆえ、$b_n=2n-1(=1+2(n-1))$

よって、初項1, 公差2の等差数列をなす。(1から始まる奇数列をなす。)

7 次の空欄を埋めよ。

(1) $x\neq 1$ のとき、$1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}=\boxed{\dfrac{x^n-1}{x-1}}$

(2) (1) より x^n-1 を因数分解すると

$$\boxed{x^n-1=(x-1)(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1})}$$

8 一般項が $\dfrac{3^{n+1}}{2^n}$ である等比数列の初項と公比を求めよ。

—解答例—

$\dfrac{3^{n+1}}{2^n}=\dfrac{9}{2}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}$

ゆえ初項は $\dfrac{9}{2}$ (注意 $n=1$ を代入しても良い。)

公比は $\dfrac{3}{2}$

9 等比数列をなす3つの実数がある。これらの和は 13 で、積は 27 である。これら3つの数を求めよ。

—解答例—

a,b,c がこの順でとうひ数列をなすとする。

$a+b+c=13,\ abc=27,\ b^2=ac$ が成り立つので、$b^3=27=3^3$ となる。b は実数ゆえ $b=3$ である。よって、$a+c=10,\ ac=9$ ゆえ、これを解いて求める3数は 1,3,9 である。

数列演習　No3　いろいろな数列

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ 次の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \boxed{\frac{n(n+1)}{2}}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \boxed{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \boxed{\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2}$

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 3^k = \boxed{\frac{3(3^n-1)}{2}}$

(5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 3 = \boxed{3n}$

(6) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(6k^2-4k+1)$

—解答例—

$$\text{与式} = 6\sum_{k=1}^{n} k^2 - 4\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$$
$$= 6\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4\cdot\frac{n(n+1)}{2} + n$$
$$= n\{(n+1)(2n+1) - 2(n+1) + 1\} = n(2n^2+n) = n^2(2n+1)$$

(7) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2^k+k)$

—解答例—

$$\text{与式} = \sum_{k=1}^{n} 2^k + \sum_{k=1}^{n} k$$
$$= \frac{2(2^n-1)}{2-1} + \frac{n(n+1)}{2}$$
$$= 2(2^n-1) + \frac{n(n+1)}{2}$$

(8) $\displaystyle\sum_{k=10}^{30} k^2$

—解答例—

$$\text{与式} = \sum_{k=1}^{30} k^2 - \sum_{k=1}^{9} k^2$$
$$= \frac{30\cdot31\cdot61}{6} - \frac{9\cdot10\cdot19}{6}$$
$$= 5\cdot31\cdot61 - 3\cdot5\cdot19$$
$$= 5(1891-57) = 5\cdot1834 = 9170$$

$\boxed{2}$ 次の数列の一般項、および初項から第 n 項までの和を求めよ。

(1) $1\cdot3\ ,\ 3\cdot4\ ,\ 5\cdot5\ ,\ 7\cdot6\ ,\ \cdots$

—解答例—

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)(k+2) = \sum_{k=1}^{n}(2k^2+3k-2)$$
$$= 2\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 2 = 2\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 3\cdot\frac{n(n+1)}{2} - 2n$$
$$= \frac{n\{(4n^2+6n+2)+(9n+9)-12\}}{6} = \frac{n(4n^2+15n-1)}{6}$$

(2) $1^2\ ,\ 3^2\ ,\ 5^2\ ,\ 7^2\ ,\ \cdots$

—解答例—

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 = \sum_{k=1}^{n}(4k^2-4k+1) = 4\sum_{k=1}^{n} k^2 - 4\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$$
$$= 4\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4\cdot\frac{n(n+1)}{2} + n$$
$$= \frac{n\{(4n^2+6n+2)-(6n+6)+3\}}{3}$$
$$= \frac{n(4n^2-1)}{3} = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$$

(3) $1\cdot1\cdot3\ ,\ 2\cdot3\cdot5\ ,\ 3\cdot5\cdot7\ ,\ \cdots$

—解答例—

$$\sum_{k=1}^{n} k(2k-1)(2k+1) = \sum_{k=1}^{n}(4k^3-k) = 4\sum_{k=1}^{n} k^3 - \sum_{k=1}^{n} k$$
$$= 4\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \frac{n(n+1)}{2}$$
$$= \frac{n(n+1)}{2}\{2n(n+1)-1\} = \frac{n(n+1)(2n^2+2n-1)}{2}$$

(4) $1\ ,\ 1+3\ ,\ 1+3+5\ ,\ 1+3+5+7\ ,\ \cdots$

—解答例—

第 k 項は $1+3+5+7+\cdots+(2k-1) = \dfrac{k(1+2k-1)}{2} = k^2$

よって求める和は $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(5) $1\ ,\ 1+3\ ,\ 1+3+9\ ,\ 1+3+9+27\ ,\ \cdots$

—解答例—

第 k 項は $1+3+9+\cdots+3^{k-1} = \dfrac{3^k-1}{3-1}$

よって求める和は $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{3^k-1}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} 3^k - \frac{n}{2}$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{3(3^n-1)}{3-1} - \frac{n}{2} = \frac{3^{n+1}-2n-3}{4}$$

(6) $\dfrac{1}{1\cdot4}\ ,\ \dfrac{1}{4\cdot7}\ ,\ \dfrac{1}{7\cdot10}\ ,\ \cdots$

—解答例—

$\dfrac{1}{3n-2} - \dfrac{1}{3n+1} = \dfrac{(3n+1)-(3n-2)}{(3n-2)(3n+1)} = \dfrac{3}{(3n-2)(3n+1)}$ ゆえ、第 n 項は $\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \dfrac{1}{3}\left\{\dfrac{1}{3n-2} - \dfrac{1}{3n+1}\right\}$ となる。よって、求める和は $\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{4}\right) + \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{7}\right) + \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{10}\right) + \cdots + \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3n-2}-\dfrac{1}{3n+1}\right) = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{3n+1}\right) = \dfrac{n}{3n+1}$

(7) $\dfrac{1}{2\cdot4}\ ,\ \dfrac{1}{3\cdot5}\ ,\ \dfrac{1}{4\cdot6}\ ,\ \cdots$

—解答例—

$\dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+3} = \dfrac{(n+3)-(n+1)}{(n+1)(n+3)} = \dfrac{2}{(n+1)(n+3)}$ ゆえ、

求める和は $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}\right) + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}\right) + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{6}\right) + \cdots + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+2}\right) + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+3}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{n+2}-\dfrac{1}{n+3}\right)$

(8) $\dfrac{1}{1\cdot3\cdot5}\ ,\ \dfrac{1}{3\cdot5\cdot7}\ ,\ \dfrac{1}{5\cdot7\cdot9}\ ,\ \cdots$

—解答例—

$$\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} - \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{(2n+3)-(2n-1)}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}$$
$$= \frac{4}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}$$ ゆえ、求める和は

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1\cdot3}-\frac{1}{3\cdot5}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3\cdot5}-\frac{1}{5\cdot7}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{5\cdot7}-\frac{1}{7\cdot9}\right) + \cdots$$
$$+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{(2n-1)(2n+1)} - \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}\right) = \frac{n(n+2)}{3(2n+1)(2n+3)}$$

(9) $\dfrac{1}{1}\ ,\ \dfrac{1}{1+2}\ ,\ \dfrac{1}{1+2+3}\ ,\ \cdots$

—解答例—

一般項は、$\dfrac{1}{1+2+\cdots+k} = \dfrac{2}{k(k+1)} = \dfrac{2}{k} - \dfrac{2}{k+1}$ ゆえ、

求める和は、$\left(\dfrac{2}{1}-\dfrac{2}{2}\right) + \left(\dfrac{2}{2}-\dfrac{2}{3}\right) + \left(\dfrac{2}{3}-\dfrac{2}{4}\right) + \cdots$

$$+\left(\frac{2}{n}-\frac{2}{n+1}\right) = \frac{2}{1} - \frac{2}{n+1} = \frac{2n}{n+1}$$

数列演習　No4　いろいろな数列 No2

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ 次の数列の一般項、および初項から第 n 項までの和を求めよ。

(1) $1\cdot 1$, $2\cdot 2$, $3\cdot 4$, $4\cdot 8$, $\cdots$

—解答例—

求める和を S とすると

$$\begin{array}{rl} S= & 1\cdot 1+2\cdot 2+3\cdot 2^2+\cdots+\qquad n\cdot 2^{n-1} \\ -)\ 2S= & \qquad 1\cdot 2+2\cdot 2^2+\cdots+(n-1)\cdot 2^{n-1}+n\cdot 2^n \\ \hline -S= & 1+\ \ 2+\ \ 2^2+\cdots+\qquad 2^{n-1}-n\cdot 2^n \end{array}$$

よって $S=n\cdot 2^n-\dfrac{2^n-1}{2-1}=n\cdot 2^n-2^n+1=(n-1)2^n+1$

(2) 2 , $4x$, $6x^2$, $8x^3$, $\cdots$

—解答例—

求める和を S とすると

$$\begin{array}{rl} S= & 2\cdot 1+4\cdot x+6\cdot x^2+\cdots+\qquad 2n\cdot x^{n-1} \\ -\quad)\ xS= & \qquad 2\cdot x+4\cdot x^2+\cdots+2(n-1)\cdot x^{n-1}+2n\cdot x^n \\ \hline (1-x)S= & 2+\ \ 2x+\ \ 2x^2+\cdots+\qquad 2x^{n-1}-2n\cdot x^n \end{array}$$

$x\neq 1$ のとき

$(x-1)S=2nx^n-\dfrac{2(x^n-1)}{x-1}=\dfrac{2nx^{n+1}-(2n+2)x^n+2}{x-1}$

$\therefore S=\dfrac{2nx^{n+1}-(2n+2)x^n+2}{(x-1)^2}$

$x=1$ のとき

$S=2+4+6+\cdots+2n=\dfrac{n(2+2n)}{2}=n(n+1)$

$\boxed{2}$ 次の数列の一般項を求めよ。

(1) $1,\ 7,\ 16,\ 28,\ 43,\ \cdots$

—解答例—

一般項を $\{a_n\}$ とおき、階差数列を $\{b_n\}$ とおくと

$\{b_n\}:6,9,12,15,\cdots$ ゆえ $b_n=6+3(n-1)=3n+3$

$n\geqq 2$ のとき $a_n=1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(3k+3)=1+3\sum_{k=1}^{n-1}k+\sum_{k=1}^{n-1}3$

$=1+\dfrac{3(n-1)n}{2}+3(n-1)=\dfrac{3n^2-3n+6n-6+2}{2}$

$=\dfrac{3n^2+3n-4}{2}$

$n=1$ のとき $\dfrac{3n^2+3n-4}{2}=1=a_1$ ゆえ一致する。

よって、$a_n=\dfrac{3n^2+3n-4}{2}$ $(n=1,2,3,\cdots)$

(2) $4,\ 5,\ 2,\ 11,\ -16,\ \cdots$

—解答例—

一般項を $\{a_n\}$ とおき、階差数列を $\{b_n\}$ とおくと

$\{b_n\}:1,-3,9,-27,\cdots$ ゆえ $b_n=(-3)^{n-1}$

$n\geqq 2$ のとき $a_n=4+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(-3)^{k-1}$

$=4+\dfrac{(-3)^{n-1}-1}{-3-1}=\dfrac{17-(-3)^{n-1}}{4}$

$n=1$ のとき $\dfrac{17-(-3)^{n-1}}{4}=4=a_1$ ゆえ一致する。

よって、$a_n=\dfrac{17-(-3)^{n-1}}{4}$ $(n=1,2,3,\cdots)$

(3) $1,\ 9,\ 26,\ 55,\ 99,\ 161,\ \cdots$

—解答例—

一般項を $\{a_n\}$ とおき、階差数列を $\{b_n\}$, さらにその階差数列を $\{c_n\}$ とおくと $\{b_n\}:8,17,29,44,62,\cdots$, $\{c_n\}:9,12,15,18,\cdots$ ゆえ $c_n=9+3(n-1)=3n+6$

$n\geqq 2$ のとき $b_n=8+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}3(k+2)=-1+3\sum_{k=1}^{n+1}k=-1+\dfrac{3(n+1)(n+2)}{2}$ となる。$n=1$ のとき $-1+\dfrac{3\cdot 2\cdot 3}{2}=8=b_1$ ゆえ一致し、$b_n=-1+\dfrac{3(n+1)(n+2)}{2}$ $(n=1,2,3,\cdots)$

$n\geqq 2$ のとき $a_n=1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\left(-1+\dfrac{3(k+1)(k+2)}{2}\right)=1-(n-1)+\dfrac{3}{2}\sum_{k=1}^{n}k(k+1)-3=-n-1+\dfrac{1}{2}\cdot n(n+1)(n+2)=\dfrac{(n+1)(n^2+2n-2)}{2}$ となる。$n=1$ のとき $\dfrac{(n+1)(n^2+2n-2)}{2}=1=a_1$ ゆえ一致し、$a_n=\dfrac{(n+1)(n^2+2n-2)}{2}$ $(n=1,2,3,\cdots)$

$\boxed{3}$ 初項から第 n 項までの和 S_n が次の式で与えられているとき、この数列の一般項 a_n を求めよ。

(1) $S_n=n^2-n+1$

—解答例—

$n\geqq 2$ のとき $a_n=S_n-S_{n-1}=(n^2-n+1)-\{(n-1)^2-(n-1)+1\}=n^2-n+1-n^2+2n-1+n-1-1=2n-2$

$n=1$ のとき、$a_1=S_1=1-1+1=1$, $2n-2=0\neq a_1$

よって、$a_n=\begin{cases}2n-2 & (n\geqq 2)\\ 1 & (n=1)\end{cases}$

(2) $S_n=2n^2+n$

—解答例—

$n\geqq 2$ のとき $a_n=S_n-S_{n-1}=(2n^2+n)-\{2(n-1)^2+(n-1)\}=2n^2+n-2n^2+4n-2-n+1=4n-1$

$n=1$ のとき、$a_1=S_1=2+1=3$, $4n-1=3=a_1$

よって、$a_n=4n-1$ $(n\geqq 1)$

(3) $S_n=2^n-n$

—解答例—

$n\geqq 2$ のとき $a_n=S_n-S_{n-1}=(2^n-n)-\{2^{n-1}-(n-1)\}=2^n-2^{n-1}-1=2^{n-1}-1$

$n=1$ のとき、$a_1=S_1=2^1-1=1$, $2^{1-1}-1=1-1=0\neq a_1$

よって、$a_n=\begin{cases}2^{n-1}-1 & (n\geqq 2)\\ 1 & (n=1)\end{cases}$

数列演習　No5　漸化式

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ 次のように定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 2$

—解答例—

初項 1, 公差 2 の等差数列ゆえ

$a_n = 1 + 2(n-1) = 2n - 1$

(2) $a_1 = 2$, $a_{n+1} = -5a_n$

—解答例—

初項 2, 公比 -5 の等比数列ゆえ

$a_n = 2 \cdot (-5)^{n-1}$

(3) $a_1 = 0$, $a_{n+1} = a_n + 2n + 3$

—解答例—

階差数列を $\{b_n\}$ とすると、$b_n = a_{n+1} - a_n = 2n + 3$

よって $n \geqq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = \sum_{k=1}^{n-1}(2k+3) = 2\sum_{k=1}^{n-1} k + \sum_{k=1}^{n-1} 3$$
$$= (n-1)n + 3(n-1) = (n-1)(n+3)$$

$n = 1$ のとき、$(n-1)(n+3) = 0 = a_1$ ゆえ一致するので

$a_n = (n-1)(n+3)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$

(4) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 3^n$

—解答例—

階差数列を $\{b_n\}$ とすると、$b_n = a_{n+1} - a_n = 3^n$

よって $n \geqq 2$ のとき

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 3^k = 1 + \frac{3(3^{n-1}-1)}{3-1} = \frac{3^n - 1}{2}$$

$n = 1$ のとき、$\dfrac{3^n-1}{2} = 1 = a_1$ ゆえ一致するので

$a_n = \dfrac{3^n - 1}{2}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$

$\boxed{2}$ 次のように定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 8$, $a_{n+1} = 3a_n - 4$

—解答例—

$$\begin{array}{rrcl} & a_{n+1} &=& 3a_n - 4 \\ -) & \alpha &=& 3\alpha - 4 \cdots ① \\ \hline & a_{n+1} - \alpha &=& 3(a_n - \alpha) \cdots ② \end{array}$$

① から $\alpha = 2$ ゆえ、② から $\{a_n - 2\}$ は初項 $a_1 - 2 = 6$, 公比 3 の等比数列である。$\therefore a_n - 2 = 6 \cdot 3^{n-1} = 2 \cdot 3^n$ $\therefore a_n = 2 \cdot 3^n + 2$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$

(2) $a_1 = 3$, $a_{n+1} = 2a_n + 1$

—解答例—

$$\begin{array}{rrcl} & a_{n+1} &=& 2a_n + 1 \\ -) & \alpha &=& 2\alpha + 1 \cdots ① \\ \hline & a_{n+1} - \alpha &=& 2(a_n - \alpha) \cdots ② \end{array}$$

① から $\alpha = -1$ ゆえ、② から $\{a_n + 1\}$ は初項 $a_1 + 1 = 4$, 公比 2 の等比数列である。$\therefore a_n + 1 = 4 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+1}$ $\therefore a_n = 2^{n+1} - 1$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$

(3) $a_1 = 2$, $3a_{n+1} = a_n + 2$

—解答例—

$$\begin{array}{rrcl} & 3a_{n+1} &=& a_n + 2 \\ -) & 3\alpha &=& \alpha + 2 \cdots ① \\ \hline & 3(a_{n+1} - \alpha) &=& a_n - \alpha \cdots ② \end{array}$$

① から $\alpha = 1$ ゆえ、② から $\{a_n - 1\}$ は初項 $a_1 - 1 = 1$, 公比 $\dfrac{1}{3}$ の等比数列である。$\therefore a_n - 1 = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$ $\therefore a_n = \dfrac{1}{3^{n-1}} + 1$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$

$\boxed{3}$ $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{3a_n + 2}$ で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

—解答例—

帰納的に $a_n \neq 0$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ であるから、漸化式の逆数をとって

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{3a_n + 2}{a_n} = \frac{2}{a_n} + 3$$

$b_n = \dfrac{1}{a_n}$ とおくと $b_{n+1} = 2b_n + 3$, $b_1 = \dfrac{1}{a_1} = 1$

$$\begin{array}{rrcl} & b_{n+1} &=& 2b_n + 3 \\ -) & \alpha &=& 2\alpha + 3 \cdots ① \\ \hline & b_{n+1} - \alpha &=& 2(b_n - \alpha) \cdots ② \end{array}$$

① から $\alpha = -3$ ゆえ、② から $\{b_n + 3\}$ は初項 $b_1 + 3 = 4$, 公比 2 の等比数列である。$\therefore b_n + 3 = 4 \cdot 2^{n-1}$ $\therefore b_n = 2^{n+1} - 3$ $\therefore a_n = \dfrac{1}{2^{n+1} - 3}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$

$\boxed{4}$ $a_1 = 2$, $a_2 = 7$, $a_{n+2} - 8a_{n+1} + 15a_n = 0$ で定まる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

—解答例—

$t^2 - 8t + 15 = (t-3)(t-5) = 0$ を解いて $t = 3, 5$

よって、$a_{n+2} - 3a_{n+1} = 5(a_{n+1} - 3a_n)$, $a_{n+2} - 5a_{n+1} = 3(a_{n+1} - 5a_n)$

これから、$\{a_{n+1} - 3a_n\}$ は、公比 5, 初項 $a_2 - 3a_1 = 1$ の等比数列、$\{a_{n+1} - 5a_n\}$ は、公比 3, 初項 $a_2 - 5a_1 = -3$ の等比数列ゆえ $a_{n+1} - 3a_n = 5^{n-1} \cdots ①$, $a_{n+1} - 5a_n = -3 \cdot 3^{n-1} \cdots ②$

① − ② より $a_n = \dfrac{5^{n-1} + 3^n}{2}$

数列演習　No6　数学的帰納法

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ $a_1=1$, $a_{n+1}=\dfrac{3a_n-1}{4a_n-1}$ $(n=1\,,2\,,3\,,\cdots)$ で定義される数列 $\{a_n\}$ がある。

(1) 初めの４項を求めよ。

—解答例—

$a_1=1$

$a_2=\dfrac{3-1}{4-1}=\dfrac{2}{3}$

$a_3=\dfrac{3\cdot\frac{2}{3}-1}{4\cdot\frac{2}{3}-1}=\dfrac{3}{5}$

$a_4=\dfrac{3\cdot\frac{3}{5}-1}{4\cdot\frac{3}{5}-1}=\dfrac{4}{7}$

(2) a_n を推定すると、$a_n=\boxed{\dfrac{n}{2n-1}}$

(3) 推定が正しいことを数学的帰納法で証明せよ。

—解答例—

[1] $n=1$ のとき $\dfrac{n}{2n-1}=\dfrac{1}{1}=1=a_1$ ゆえ、$n=1$ のとき成り立つ。

[2] $n=k$ (k は自然数) のとき成り立つと仮定する。すなわち $a_k=\dfrac{k}{2k-1}$ が成り立つと仮定する。このとき、$n=k+1$ のときの式 $a_{k+1}=\dfrac{k+1}{2(k+1)-1}$ が成り立つことを示す。

$a_{k+1}=\dfrac{3a_k-1}{4a_k-1}=\dfrac{3\cdot\frac{k}{2k-1}-1}{4\cdot\frac{k}{2k-1}-1}=\dfrac{3k-(2k-1)}{4k-(2k-1)}=\dfrac{k+1}{2k+1}=\dfrac{k+1}{2(k+1)-1}$

よって $n=k+1$ のときも成り立つ。

[3] [1],[2] から、全ての自然数 n に対して $a_n=\dfrac{n}{2n-1}$ が成り立つ。

$\boxed{2}$ 次の等式、不等式を証明せよ。ただし、n は自然数とする。

(1) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{4}+\dfrac{3}{8}+\cdots+\dfrac{n}{2^n}=2-\dfrac{n+2}{2^n}$

—解答例—

[1] $n=1$ のとき、左辺 $=\dfrac{1}{2}$, 右辺 $=2-\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{2}$ ゆえ成り立つ。

[2] $n=k$ (k は自然数) のとき成り立つと仮定する。すなわち $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{4}+\dfrac{3}{8}+\cdots+\dfrac{k}{2^k}=2-\dfrac{k+2}{2^k}\cdots$① が成り立つと仮定する。このとき、$n=k+1$ のときの式 $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{4}+\dfrac{3}{8}+\cdots+\dfrac{k+1}{2^{k+1}}=2-\dfrac{(k+1)+2}{2^{k+1}}$ が成り立つことを示す。① の両辺に $\dfrac{k+1}{2^{k+1}}$ を加えると、左辺 $=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{4}+\dfrac{3}{8}+\cdots+\dfrac{k+1}{2^{k+1}}=2-\dfrac{k+2}{2^k}+\dfrac{k+1}{2^{k+1}}=2-\dfrac{2(k+2)-(k+1)}{2^{k+1}}=2-\dfrac{k+3}{2^{k+1}}=$ 右辺

よって、$n=k+1$ のとき成り立つ。

[3] [1],[2] より全ての自然数 n に対して

$\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{4}+\dfrac{3}{8}+\cdots+\dfrac{n}{2^n}=2-\dfrac{n+2}{2^n}$ が成り立つ。

(2) $1^2+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}\leqq 2-\dfrac{1}{n}$

—解答例—

[1] $n=1$ のとき、左辺 $=\dfrac{1}{1}=1$, 右辺 $=2-\dfrac{1}{1}=1$ ゆえ成り立つ。

[2] $n=k$ (k は自然数) のとき成り立つと仮定する。すなわち $1^2+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{k^2}\leqq 2-\dfrac{1}{k}\cdots$① が成り立つと仮定する。このとき、$n=k+1$ のときの式 $1^2+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{(k+1)^2}\leqq 2-\dfrac{1}{k+1}$ が成り立つことを示す。

① の両辺に $\dfrac{1}{(k+1)^2}$ を加えると、$1^2+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{(k+1)^2}\leqq 2-\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{(k+1)^2}\cdots$② が成り立つ。

ここで、$\left(2-\dfrac{1}{k+1}\right)-\left(2-\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{(k+1)^2}\right)=-\dfrac{1}{k+1}+\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{(k+1)^2}=\dfrac{-k+k+1}{k(k+1)}-\dfrac{1}{(k+1)^2}=\dfrac{1}{k(k+1)}-\dfrac{1}{(k+1)^2}>0$ $(\because k\geqq 1)$ ゆえ、$2-\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{(k+1)^2}<2-\dfrac{1}{k+1}$ が成り立つ。よって ② から $1^2+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{(k+1)^2}<2-\dfrac{1}{k+1}$ が成り立つので、$n=k+1$ のとき成り立つ。

[3] [1],[2] より全ての自然数 n に対して $1^2+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{k^2}\leqq 2-\dfrac{1}{k}$ が成り立つ。

(3) $n\geqq 5$ のとき、$3^n>n(n+1)(n+2)$

—解答例—

[1] $n=5$ のとき、左辺 $=3^5=243$, 右辺 $=5\cdot 6\cdot 7=210$ ゆえ成り立つ。

[2] $n=k$ (k は 5 以上の自然数) のとき成り立つと仮定する。すなわち $3^k>k(k+1)(k+2)\cdots$① が成り立つと仮定する。このとき、$n=k+1$ のときの式 $3^{k+1}>(k+1)(k+2)(k+3)$ が成り立つことを示す。

① の両辺に 3 をかけると、$3^{k+1}>3k(k+1)(k+2)$ が成り立つ。

ここで、$3k(k+1)(k+2)-(k+1)(k+2)(k+3)=(k+1)(k+2)(2k-3)>0$ $(\because k\geqq 5)$ ゆえ、$3^{k+1}>3k(k+1)(k+2)>(k+1)(k+2)(k+3)$ が成り立つので、$n=k+1$ のときの式が成り立つ。

[3] [1],[2] より 5 以上の全ての自然数 n に対して $3^n>n(n+1)(n+2)$ が成り立つ。