数学 II Bの演習　目次

式と証明演習　No1　整式の除法

____ 組 ____ 番　氏名 ____________________

$\boxed{1}$ 次の割り算の商と余りを求めよ。

(1) $(3x^4+5x^3+2x+4)\div(x^2+3x+2)$

—解答例—

$$
\begin{array}{rr}
 & 3x^2\ -4x\ \ \ +6 \\ \cline{2-2}
x^2+3x+2 \big) & 3x^4+5x^3\ \ \ \ \ +2x\ +4 \\
 & 3x^4+9x^3\ +6x^2\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \\ \cline{2-2}
 & -4x^3\ -6x^2\ +2x\ +4 \\
 & -4x^3-12x^2\ -8x\ \ \ \ \ \ \\ \cline{2-2}
 & 6x^2+10x\ +4 \\
 & 6x^2+18x+12 \\ \cline{2-2}
 & -8x\ -8
\end{array}
$$

よって，商は $3x^2-4x+6$, 余りは $-8x-8$

(2) $(6x^3+x^2-1)\div(3x^2-x+1)$

—解答例—

$$
\begin{array}{rr}
 & 2x\ \ +1\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \\ \cline{2-2}
3x^2-x+1 \big) & 6x^3\ +x^2\ \ \ \ \ \ -1 \\
 & 6x^3-2x^2+2x\ \ \ \ \ \ \\ \cline{2-2}
 & 3x^2-2x-1 \\
 & 3x^2\ -x+1 \\ \cline{2-2}
 & -x-2
\end{array}
$$

よって，商は $2x+1$, 余りは $-x-2$

(3) $(2x^3+3x^2-x+5)\div(x-1)$

—解答例—

$$
\begin{array}{rr}
 & 2x^2\ +5x\ +4 \\ \cline{2-2}
x-1 \big) & 2x^3+3x^2\ -x+5 \\
 & 2x^3-2x^2\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \\ \cline{2-2}
 & 5x^2\ -x+5 \\
 & 5x^2-5x\ \ \ \ \ \\ \cline{2-2}
 & 4x+5 \\
 & 4x-4 \\ \cline{2-2}
 & 9
\end{array}
$$

よって，商は $2x^2+5x+4$, 余りは 9

(4) $(x^4-3x^3+x+1)\div(x+2)$

—解答例—

$$
\begin{array}{rr}
 & x^3-5x^2\ +10x\ -19 \\ \cline{2-2}
x+2 \big) & x^4-3x^3\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ +x\ +1 \\
 & x^4+2x^3\ \\ \cline{2-2}
 & -5x^3\ \ \ \ \ \ \ \ \ +x\ +1 \\
 & -5x^3-10x^2\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \\ \cline{2-2}
 & 10x^2\ \ +x\ +1 \\
 & 10x^2+20x\ \ \ \ \ \ \\ \cline{2-2}
 & -19x\ +1 \\
 & -19x-38 \\ \cline{2-2}
 & 39
\end{array}
$$

よって，商は $x^3-5x^2+10x-19$, 余りは 39

(5) $(2a^3-11a^2b+8ab^2+6b^3)\div(2a-3b)$

—解答例—

$$
\begin{array}{rr}
 & a^2\ \ -4ba\ \ -2b^2\ \ \ \ \ \ \ \ \\ \cline{2-2}
2a-3b \big) & 2a^3-11ba^2\ +8b^2a+6b^3 \\
 & 2a^3\ -3ba^2\ \\ \cline{2-2}
 & -8ba^2\ +8b^2a+6b^3 \\
 & -8ba^2+12b^2a\ \ \ \ \ \ \ \ \\ \cline{2-2}
 & -4b^2a+6b^3 \\
 & -4b^2a+6b^3 \\ \cline{2-2}
 & 0
\end{array}
$$

よって，商は $a^2-4ab-2b^2$, 余りは 0

$\boxed{2}$ x の整式 $P(x)$ を x^2+3x-2 で割ると商が $3x+5$ で余りが $2x+7$ であった。整式 $\mathrm{P}(x)$ を求めよ。

—解答例—

$$
\begin{aligned}
P(x) &= (x^2+3x-2)(3x+5)+2x+7 \\
&= 3x^3+14x^2+9x-10+2x+7 \\
&= 3x^3+14x^2+11x-3
\end{aligned}
$$

$\boxed{3}$ x の整式 x^3+ax^2+x+b が x^2-3x-1 で割り切れるように定数 a , b の値を求めよ。

—解答例—

$$
\begin{array}{rr}
 & x\ +(a+3)\ \\ \cline{2-2}
x^2-3x-1 \big) & x^3\ \ \ \ +ax^2\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ +x\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ +b \\
 & x^3\ \ \ \ -3x^2\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ -x\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \\ \cline{2-2}
 & (a+3)x^2\ \ \ \ \ \ \ \ +2x\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ +b \\
 & (a+3)x^2-(3a+9)x\ \ \ \ -(a+3) \\ \cline{2-2}
 & (3a+11)x+(a+b+3)
\end{array}
$$

割り切れるのは $3a+11=0$, $a+b+3=0$ のときだから，

$a=-\dfrac{11}{3}$, $b=\dfrac{2}{3}$

式と証明演習　No2　分数式の計算

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{4}$ 次の計算をせよ。

(1) $\dfrac{1}{a^2+3a+2}+\dfrac{1}{2a^2+3a+1}$

—解答例—

与式 $=\dfrac{1}{(a+1)(a+2)}+\dfrac{1}{(a+1)(2a+1)}$

$=\dfrac{2a+1+a+2}{(a+1)(a+2)(2a+1)}=\dfrac{3a+3}{(a+1)(a+2)(2a+1)}$

$=\dfrac{3}{(a+2)(2a+1)}$

(2) $\dfrac{1}{a^2-a}+\dfrac{a}{1-a}$

—解答例—

与式 $=\dfrac{1}{a(a-1)}-\dfrac{a}{a-1}=\dfrac{1-a^2}{a(a-1)}$

$=\dfrac{-(a-1)(a+1)}{a(a-1)}=-\dfrac{a+1}{a}$

(3) $\dfrac{a}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c}{(c-a)(c-b)}$

—解答例—

与式 $=\dfrac{-a(b-c)-b(c-a)-c(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

$=\dfrac{a(-b+c+b-c)-bc+cb}{(a-b)(b-c)(c-a)}=0$

(4) $\dfrac{(x+1)^2}{x^2-2x-3}\div\dfrac{x^2-1}{x^2+x-2}$

—解答例—

与式 $=\dfrac{(x+1)^2}{(x+1)(x-3)}\cdot\dfrac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{x+2}{x-3}$

(5) $\dfrac{x^2-1}{1-\dfrac{1}{x}}$

—解答例—

与式 $=\dfrac{x(x-1)(x+1)}{x-1}=x(x+1)$

(6) $\dfrac{x-2+\dfrac{2}{x+1}}{x+2-\dfrac{2}{x+1}}$

—解答例—

与式 $=\dfrac{(x-2)(x+1)+2}{(x+2)(x+1)-2}=\dfrac{x^2-x}{x^2+3x}=\dfrac{x(x-1)}{x(x+3)}=\dfrac{x-1}{x+3}$

(7) $1+\dfrac{x}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{x-1}}}$

—解答例—

与式 $=1+\dfrac{x}{1-\dfrac{x-1}{x-1-x}}=1+\dfrac{x}{1+(x-1)}=1+\dfrac{x}{x}=2$

(8) $\dfrac{1}{1-a}+\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{2}{1+a^2}+\dfrac{4}{1+a^4}$

—解答例—

与式 $=\dfrac{1+a+1-a}{(1-a)(1+a)}+\dfrac{2}{1+a^2}+\dfrac{4}{1+a^4}$

$=\dfrac{2}{1-a^2}+\dfrac{2}{1+a^2}+\dfrac{4}{1+a^4}$

$=\dfrac{2(1+a^2)+2(1-a^2)}{(1-a^2)(1+a^2)}+\dfrac{4}{1+a^4}$

$=\dfrac{4}{1-a^4}+\dfrac{4}{1+a^4}$

$=\dfrac{4(1+a^4)+4(1-a^4)}{(1-a^4)(1+a^4)}=\dfrac{8}{1-a^8}$

(9) $\dfrac{x+1}{x+2}-\dfrac{x+2}{x+3}-\dfrac{x+3}{x+4}+\dfrac{x+4}{x+5}$

—解答例—

与式 $=\dfrac{x+2-1}{x+2}-\dfrac{x+3-1}{x+3}-\dfrac{x+4-1}{x+4}+\dfrac{x+5-1}{x+5}$

$=1-\dfrac{1}{x+2}-1+\dfrac{1}{x+3}-1+\dfrac{1}{x+4}+1-\dfrac{1}{x+5}$

$=\dfrac{-(x+3)+(x+2)}{(x+2)(x+3)}+\dfrac{(x+5)-(x+4)}{(x+4)(x+5)}$

$=\dfrac{-1}{(x+2)(x+3)}+\dfrac{1}{(x+4)(x+5)}$

$=\dfrac{-(x+4)(x+5)+(x+2)(x+3)}{(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}$

$=\dfrac{-4x-14}{(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)}$

(10) $\dfrac{1}{x(x+1)}+\dfrac{1}{(x+1)(x+2)}+\dfrac{1}{(x+2)(x+3)}$

—解答例—

与式 $=\dfrac{(x+2)+x}{x(x+1)(x+2)}+\dfrac{1}{(x+2)(x+3)}$

$=\dfrac{2}{x(x+2)}+\dfrac{1}{(x+2)(x+3)}$

$=\dfrac{2(x+3)+x}{x(x+2)(x+3)}$

$=\dfrac{3}{x(x+3)}$

式と証明演習　No3　恒等式・等式の証明

____ 組 ____ 番　氏名 ____________________

$\boxed{1}$ 次の等式が x の恒等式となるように定数 a , b , c , d の値を求めよ。

(1) $x^3-2x^2+4=a(x-2)^3+b(x-2)^2+c(x-2)+d$

—解答例—

$x-2=t$ とおくと

$(t+2)^3-2(t+2)^2+4=at^3+bt^2+ct+d$

$t^3+6t^2+12t+8-2t^2-8t-8+4=at^3+bt^2+ct+d$

$t^3+4t^2+4t+4=at^3+bt^2+ct+d$

これが t の恒等式なので，係数を比較して

$a=1,\ b=4,\ c=4,\ d=4$ //

(2) $\dfrac{x+a}{x^2-3x+2}+\dfrac{x+b}{x^2-1}=\dfrac{cx-7}{x^2-x-2}$

—解答例—

$\dfrac{x+a}{(x-1)(x-2)}+\dfrac{x+b}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{cx-7}{(x+1)(x-2)}$

両辺に $(x-1)(x-2)(x+1)$ をかけて，分母をはらった式

$(x+1)(x+a)+(x-2)(x+b)=(x-1)(cx-7)$

も x の恒等式である。よって展開整理して

$2x^2+(a+b-1)x+a-2b=cx^2+(-c-7)x+7$

係数を比較して

$$\begin{cases} 2=c \\ a+b-1=-c-7 \\ a-2b=7 \end{cases}$$

$\therefore a=-3,\ b=-5,\ c=2$ //

(3) $(k+1)x-(2k+3)y=3k+5$ が k のどんな値に対しても成り立つように、定数 x , y の値を求めよ。

—解答例—

k について整理すると

$(x-2y)k+x-3y=3k+5$

これが k についての恒等式だから，係数を比較して

$$\begin{cases} x-2y=3 \\ x-3y=5 \end{cases}$$

$\therefore x=-1,\ y=-2$ //

$\boxed{2}$ 次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$(a^2-b^2)(c^2-d^2)=(ac+bd)^2-(ad+bc)^2$$

—解答例—

（左辺）$=(a^2-b^2)(c^2-d^2)$

$=a^2c^2-a^2d^2-b^2c^2+b^2d^2$

（右辺）$=(ac+bd)^2-(ad+bc)^2$

$=a^2c^2+2abcd+b^2d^2-(a^2d^2+2abcd+b^2c^2)$

$=a^2c^2-a^2d^2-b^2c^2+b^2d^2$

よって（左辺）＝（右辺） //

$\boxed{3}$ $a+b+c=0$ のとき、次の等式が成り立つことを証明せよ。

(1) $2a^2+bc=(b-a)(c-a)$

—解答例—

$a+b+c=0$ より $c=-a-b$

（左辺）$=2a^2+b(-a-b)$

$=2a^2-ab-b^2$

（右辺）$=(b-a)(-a-b-a)$

$=(b-a)(-2a-b)$

$=2a^2-ab-b^2$

よって（左辺）＝（右辺） //

(2) $a^3+b^3+c^3=-3(a+b)(b+c)(c+a)$

—解答例—

$a+b+c=0$ より $c=-a-b$

（左辺）$=a^3+b^3+(-a-b)^3$

$=-3a^2b-3ab^2$

$=-3ab(a+b)$

（右辺）$=-3(a+b)(b-a-b)(-a-b+a)$

$=-3ab(a+b)$

よって（左辺）＝（右辺） //

式と証明演習　No4　等式・不等式の証明

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$ のとき、$\dfrac{a+2b}{3a+4b}=\dfrac{c+2d}{3c+4d}$ を証明せよ。

—解答例—

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$ とおくと，$a=bk,\ c=dk$

（左辺）$=\dfrac{bk+2b}{3bk+4b}=\dfrac{b(k+2)}{b(3k+4)}=\dfrac{k+2}{3k+4}$

（右辺）$=\dfrac{dk+2d}{3dk+4d}=\dfrac{d(k+2)}{d(3k+4)}=\dfrac{k+2}{3k+4}$

$\therefore$（左辺）＝（右辺）　//

$\boxed{2}$ $a:b:c=x:y:z$ のとき次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=(ax+by+cz)^2$$

—解答例—

$a:b:c=x:y:z$ より

$\dfrac{a}{x}=\dfrac{b}{y}=\dfrac{c}{z}=k$ とおくと，$a=kx,\ b=ky,\ c=zk$

（左辺）$=\{(kx)^2+(ky)^2+(kz)^2\}(x^2+y^2+z^2)$
$=k^2(x^2+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2)$
$=k^2(x^2+y^2+z^2)^2$

（右辺）$=(kx\cdot x+ky\cdot y+kz\cdot z)^2$
$=\{k(x^2+y^2+z^2)\}^2$
$=k^2(x^2+y^2+z^2)^2$

$\therefore$（左辺）＝（右辺）　//

$\boxed{3}$ $\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}$ のとき、次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$(a+b+c)(a-b+c)=a^2+b^2+c^2$$

—解答例—

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{b}{c}=k$ とおくと，$a=bk,\ b=ck\cdots$

また $b=ck$ を $a=bk$ に代入して $a=ck\cdot k=ck^2\cdots$

より

（左辺）$=(a+b+c)(a-b+c)$
$=(ck^2+ck+c)(ck^2-ck+c)$
$=c(k^2+k+1)c(k^2-k+1)$
$=c^2\{(k^2+1)^2-k^2\}$
$=c^2(k^4+k^2+1)$

（右辺）$=(ck^2)^2+(ck)^2+c^2$
$=c^2((k^2+k^2+1)$

$\therefore$（左辺）＝（右辺）　//

$\boxed{4}$ $x+y+z=0,\ x-y+2z=0\ \ (x\neq 0,\ y\neq 0,\ z\neq 0)$ のとき

(1) $x:y:z$ を求めよ。

(2) $\dfrac{yz+zx+xy}{x^2+y^2+z^2}$ の値を求めよ。

—解答例—

(1) $\begin{cases} x+y+z=0 & \cdots ① \\ x-y+2z=0 & \cdots ② \end{cases}$

①＋② より $x=-\dfrac{3}{2}z$

①－② より $y=\dfrac{1}{2}z$

$\therefore x:y:z=-\dfrac{3}{2}z:\dfrac{1}{2}z:z=-3:1:2$ //

(2) (1) より $x=-3k,\ y=k,\ z=2k$

$\dfrac{yz+zx+xy}{x^2+y^2+z^2}$
$=\dfrac{k\cdot 2k+2k\cdot(-3k)+(-3k)\cdot k}{(-3k)^2+k^2+(2k)^2}$
$=\dfrac{-7k^2}{14k^2}$
$=-\dfrac{1}{2}$ //

$\boxed{5}$ $a<b,\ c<d$ のとき、$(a+b)(c+d)<2(ac+bd)$ が成り立つことを証明せよ。

—解答例—

(右辺)−(左辺)$=2(ac+bd)-(a+b)(c+d)$
$=ac-ad-bc+bd$
$=a(c-d)-b(c-d)$
$=(a-b)(c-d)$

ここで

$a<b$ より $a-b<0$

$c<d$ より $c-d<0$

$\therefore (a-b)(c-d)>0$

$\therefore 2(ac+bd)>(a+b)(c+d)$ //

$\boxed{6}$ $a>b>c>0$ のとき $b(a+c)>b^2+ac$ が成り立つことを証明せよ。

—解答例—

(右辺)−(左辺)$=b(a+c)-b^2-ac$
$=ab+bc-b^2-ac$
$=a(b-c)-b(b-c)$
$=(a-b)(b-c)$

ここで

$a>b$ より $a-b>0$

$b>c$ より $b-c>0$

$\therefore (a-b)(b-c)>0$

$\therefore b(a+c)>b^2+ac$ //

式と証明演習　No5　不等式の証明

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

以下の不等式を証明せよ。

$\boxed{1}$ 文字はすべて実数とする。

(1) $x^2+7>5x$

—解答例—

(左辺) − (右辺)

$=x^2+7-5x$

$=\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$

$\therefore x^2+7>5x$ //

(2) $x^2 \geqq 3(xy-y^2)$

—解答例—

(左辺) − (右辺) $=x^2-3(xy-y^2)$

$=x^2-3xy+3y^2$

$=\left(x-\dfrac{3}{2}y\right)^2+\dfrac{3}{4}y^2 \geqq 0$

$\therefore x^2 \geqq 3(xy-y^2)$ //

等号が成り立つのは $x-\frac{3}{2}y=0,\ y=0$ のとき

つまり $x=y=0$ のとき //

(3) $(a+b+c)^2 \geqq 4(ab+bc)$

—解答例—

(左辺) − (右辺) $=(a+b+c)^2-4(ab+bc)$

$=a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ca$

$=a^2+2(c-b)a+c^2-2bc+b^2$

$=a^2+2(c-b)a+(c-b)^2$

$=(a-b+c)^2 \geqq 0$

$\therefore (a+b+c)^2 \geqq 4(ab+bc)$ //

等号が成り立つのは $a-b+c=0$ のとき //

(4) $x^2-6y+5 \geqq 2x-y^2-5$

—解答例—

(左辺) − (右辺) $=x^2-6y+5-2x+y^2+5$

$=x^2-2x+y^2-6y+10$

$=(x-1)^2+(y-3)^2 \geqq 0$

$\therefore x^2-6y+5 \geqq 2x-y^2-5$ //

等号が成り立つのは $x=1,\ y=3$ のとき //

$\boxed{2}$ $a \geqq 0$, $b \geqq 0$ とする。

$\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2} \leqq \sqrt{\dfrac{a+b}{2}}$

—解答例—

$\left(\sqrt{\dfrac{a+b}{2}}\right)^2-\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^2$

$=\dfrac{a+b}{2}-\dfrac{a+2\sqrt{ab}+b}{4}=\dfrac{a-2\sqrt{ab}+b}{4}=\dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{4} \geqq 0$

$\therefore \left(\sqrt{\dfrac{a+b}{2}}\right)^2 \geqq \left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}\right)^2$

$\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2} \geqq 0,\ \sqrt{\dfrac{a+b}{2}} \geqq 0$ より $\therefore \sqrt{\dfrac{a+b}{2}} \geqq \dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2}$ //

等号が成り立つのは $\sqrt{a}=\sqrt{b}$ $\therefore\ a=b$ のとき //

$\boxed{3}$ $|a|+|b| \leqq \sqrt{2(a^2+b^2)}$

—解答例—

$\left(\sqrt{2(a^2+b^2)}\right)^2-(|a|+|b|)^2$

$=2(a^2+b^2)-(a^2+2|a||b|+b^2)=a^2-2|a||b|+b^2=(|a|-|b|)^2 \geqq 0$

$\therefore \left(\sqrt{2(a^2+b^2)}\right)^2 \geqq (|a|+|b|)^2$

$\sqrt{2(a^2+b^2)} \geqq 0,\ |a|+|b| \geqq 0$ より $\therefore \sqrt{2(a^2+b^2)} \geqq |a|+|b|$ //

等号が成り立つのは $|a|=|b|,\ \therefore\ a=b,$ または $a=-b$ のとき //

$\boxed{4}$ $b,\ d$ が正の数で $\dfrac{a}{b}<\dfrac{c}{d}$ のとき $\dfrac{a}{b}<\dfrac{a+2c}{b+2d}$

—解答例—

(右辺) − (左辺) $=\dfrac{a+2c}{b+2d}-\dfrac{a}{b}$

$=\dfrac{b(a+2c)-a(b+2d)}{b(b+2d)}=\dfrac{2(bc-ad)}{b(b+2d)}$

ここで，$b,\ d$ が正の数より $b(b+2d)>0$

また，$b,\ d$ が正の数，$\dfrac{a}{b}<\dfrac{c}{d}$ より

$ad<bc \therefore\ bc-ad>0$

$\therefore \dfrac{2(bc-ad)}{b(b+2d)}>0$

$\therefore \dfrac{a+2c}{b+2d}>\dfrac{a}{b}$ //

$\boxed{5}$ 文字はすべて正の数とする。

(1) $\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b} \geqq 2$

—解答例—

$\dfrac{b}{a}>0, \dfrac{a}{b}>0$ より

相加平均と相乗平均の関係から

$\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b} \geqq 2\sqrt{\dfrac{b}{a}\times\dfrac{a}{b}}$

$\therefore \dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b} \geqq 2$ //

また，等号が成り立つのは $\dfrac{b}{a}=\dfrac{a}{b}$ $\therefore\ a^2=b^2$

$a>0,\ b>0$ より $\therefore a=b$ のとき //

(2) $\left(\dfrac{b}{a}+\dfrac{d}{c}\right)\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}\right) \geqq 4$

—解答例—

(左辺)$=1+\dfrac{bc}{ad}+\dfrac{ad}{bc}+1=2+\dfrac{bc}{ad}+\dfrac{ad}{bc}$

$\dfrac{bc}{ad}>0,\ \dfrac{ad}{bc}>0$ から相加平均と相乗平均の関係より

$\dfrac{bc}{ad}+\dfrac{ad}{bc} \geqq 2\sqrt{\dfrac{bc}{ad}\times\dfrac{ad}{bc}}=2$

$\therefore$ (左辺)$=2+\dfrac{bc}{ad}+\dfrac{ad}{bc} \geqq 2+2=4$　　$\therefore$(左辺)$\geqq 4$ //

等号が成り立つのは $\dfrac{bc}{ad}=\dfrac{ad}{bc}$ $\therefore (ad)^2=(bc)^2$

$ad>0,\ bc>0$ より $ad=bc$ のとき //

(3) $\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{1}{c}\right)\left(c+\dfrac{1}{a}\right) \geqq 8$

—解答例—

$a>0, b>0, c>0$ から相加平均と相乗平均の関係より

$a+\dfrac{1}{b} \geqq 2\sqrt{\dfrac{a}{b}},\ b+\dfrac{1}{c} \geqq 2\sqrt{\dfrac{b}{c}},\ c+\dfrac{1}{a} \geqq 2\sqrt{\dfrac{c}{a}}$

$\therefore \left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{1}{c}\right)\left(c+\dfrac{1}{a}\right) \geqq 2\sqrt{\dfrac{a}{b}}\cdot 2\sqrt{\dfrac{b}{c}}\cdot 2\sqrt{\dfrac{c}{a}}=8$

よって題意は示された //

等号が成り立つのは $a=\dfrac{1}{b},\ b=\dfrac{1}{c},\ c=\dfrac{1}{a}$

これを解いて $a=b=c=1$ のとき //

(4) $\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{9}{a}\right) \geqq 16$

—解答例—

(左辺)$=ab+9+1+\dfrac{9}{ab}=10+ab+\dfrac{9}{ab}$

$ab>0,\ \dfrac{9}{ab}>0$ から相加平均と相乗平均の関係より

$ab+\dfrac{9}{ab} \geqq 2\sqrt{ab\times\dfrac{9}{ab}}=6$

$\therefore$ (左辺)$=10+ab+\dfrac{9}{ab} \geqq 10+6=16$　　$\therefore$(左辺)$\geqq 16$ //

等号が成り立つのは $ab=\dfrac{9}{ab}$ $\therefore (ab)^2=9$

$ab>0$ より $ab=3$ のとき //

複素数演習　No1　複素数・2次方程式の解

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ 次の計算をせよ。

(1) $(2+i)(5-3i)$

—解答例—
$= 10-6i+5i+3 = 13-i$

(2) i^7

—解答例—
$= (i^2)^3 \times i = -i$

(3) i^{-5}

—解答例—
$= \dfrac{1}{i^5} = \dfrac{i}{(i^2)^3} = -i$

(4) $(\sqrt{3}-i)^3$

—解答例—
$= (\sqrt{3})^3 - 3(\sqrt{3})^2 i + 3(\sqrt{3})i^2 - i^3 = 3\sqrt{3} - 9i - 3\sqrt{3} + i = -8i$

(5) $\dfrac{3+2i}{2-i}$

—解答例—
$= \dfrac{(3+2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}$
$= \dfrac{6+3i+4i-2}{4+1} = \dfrac{4+7i}{5}$

(6) $\sqrt{-3} \times \sqrt{-12}$

—解答例—
$= \sqrt{3}i \times \sqrt{12}i = -6$

$\boxed{2}$ 次の等式を満たす実数 $a,\ b$ の値を求めよ。

(1) $(2+3i)a-(3-2i)b = i-8$

—解答例—
$(2a-3b)+(3a+2b)i = i-8$
$2a-3b,\ 3a+2b$ は実数ゆえ
$\begin{cases} 2a-3b &= -8 \\ 3a+2b &= 1 \end{cases}$
これを解いて，$a=-1,\ b=2$

(2) $(2a+bi)(1-i) = 5+i$

—解答例—
$2a-2ai+bi+b = 5+i$
$(2a+b)+(b-2a)i = 5+i$
$2a+b,\ b-2a$ は実数ゆえ
$\begin{cases} 2a+b &= 5 \\ b-2a &= 1 \end{cases}$
これを解いて，$a=1,\ b=3$

$\boxed{3}$ 次の2次方程式を解け。

(1) $2x^2+x-3=0$

—解答例—
$(x-1)(2x+3)=0$
$\therefore x = 1,\ -\dfrac{3}{2}$

(2) $x(2x-1)=4x$

—解答例—
$x(2x-1-4)=0$
$\therefore x(2x-5)=0$
$\therefore x = 0,\ \dfrac{5}{2}$

(3) $3x-1=(x-1)^2$

—解答例—
$3x-1 = x^2-2x+1$
$\therefore x^2-5x+2=0$
$\therefore x = \dfrac{5\pm\sqrt{25-8}}{2}$
$= \dfrac{5\pm\sqrt{17}}{2}$

(4) $x^2+\dfrac{1}{3}x+\dfrac{1}{2}=0$

—解答例—
$6x^2+2x+3=0$
$\therefore x = \dfrac{-1\pm\sqrt{1-18}}{6}$
$= \dfrac{-1\pm\sqrt{17}i}{2}$

$\boxed{4}$ 2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式を D とすると、この解は

(1) $\boxed{D>0}$ のとき、異なる2つの実数解

(2) $\boxed{D=0}$ のとき、重解

(3) $\boxed{D<0}$ のとき、異なる2つの虚数解

(4) (1),(2) をあわせて、$\boxed{D \geqq 0}$ のとき、実数解

$\boxed{5}$ $x^2+(2a-3)x+a^2-a-1=0$ が、実数解を持つときの a の値の範囲を求めよ。

—解答例—
判別式 $D = (2a-3)^2 - 4(a^2-a-1) \geqq 0$
$\therefore \cancel{4a^2} - 12a + 9 - \cancel{4a^2} + 4a + 4 \geqq 0$
$\therefore -8a+13 \geqq 0$
$\therefore a \leqq \dfrac{13}{8}$

$\boxed{6}$ $x^2+2(a+1)x+2(a^2-1)=0$ が重解を持つように、定数 a の値を定めよ。また、そのときの解を求めよ。

—解答例—
判別式 $\dfrac{D}{4} = (a+1)^2 - 2(a^2-1) = 0$
$\therefore a^2+2a+1-2a^2+2=0$
$\therefore -a^2+2a+3=0$
$\therefore a^2-2a-3=0$
$\therefore (a+1)(a-3)=0$
$\therefore a=-1, 3$

$a=-1$ のとき与式は
$x^2=0$ ゆえ，重解は $x=0$
$a=3$ のとき与式は
$x^2+8x+16=0$
$\therefore (x+4)^2=0$
よって重解は $x=-4$

$\boxed{7}$ $a,\ b,\ c$ が実数で、$b=a+c$ のとき、2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ は、必ず実数解をもつことを示せ。

—解答例—
判別式 $D = b^2-4ac = (a+c)^2-4ac = a^2+2ac+c^2-4ac = (a+c)^2 \geqq 0$
よって必ず実数解を持つ。

$\boxed{8}$ a を実数とするとき、2次方程式 $x^2-3x+1-a=0$ の解を判別せよ。

—解答例—
判別式 $D = 9-4(1-a) = 4a+5$
$a < -\dfrac{5}{4}$ のとき $D<0$ ゆえ，(2つの異なる) 虚数解を持つ。
$a = -\dfrac{5}{4}$ のとき $D=0$ ゆえ，重解を持つ。
$a > -\dfrac{5}{4}$ のとき $D>0$ ゆえ，2つの異なる実数解を持つ。

$\boxed{9}$ $x=3+i$ が2次方程式 $x^2+ax+b=0$ の解であるとき、実数 $a,\ b$ を求めよ。

—解答例—
$(3+i)^2+a(3+i)+b=0$
$9+6i-1+3a+ai+b=0$
$(3a+b+8)+(a+6)i=0$
$3a+b+8,\ a+6$ は実数ゆえ
$\begin{cases} 3a+b+8 &= 0 \\ a+6 &= 0 \end{cases}$
これを解いて，$a=-6,\ b=-10$

複素数演習　No2　解と係数の関係

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ $3x^2-2x-6=0$ の 2 つの解を α, β とするとき、次の式の値を求めよ。

(1) $\alpha^2+\beta^2$　　(2) $\alpha^3+\beta^3$

(3) $\dfrac{\beta}{\alpha-1}+\dfrac{\alpha}{\beta-1}$　　(4) $\alpha-\beta$

—解答例—

(1) $\alpha+\beta=\dfrac{2}{3},\ \alpha\beta=-2$ より

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\left(\frac{2}{3}\right)^2-2(-2)=\frac{40}{9}\ /\!/$$

(2) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=\left(\dfrac{2}{3}\right)^3-3(-2)\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{116}{27}\ /\!/$

(3) $\dfrac{\beta}{\alpha-1}+\dfrac{\alpha}{\beta-1}=\dfrac{\beta(\beta-1)+\alpha(\alpha-1)}{(\alpha-1)(\beta-1)}$

$$=\frac{\alpha^2+\beta^2-(\alpha+\beta)}{\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1}=-\frac{34}{15}\ /\!/$$

(4) $(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2-4(-2)=\dfrac{76}{9}$

$$\therefore \alpha-\beta=\pm\frac{2\sqrt{19}}{3}\ /\!/$$

$\boxed{2}$ $2x^2+ax+1=0$ の 2 つの解を α , β とするとき次の等式が成り立つように定数 a の値を求めよ。

$$(\alpha+2\beta)(\beta+2\alpha)=\frac{17}{2}$$

—解答例—

$\alpha+\beta=-\dfrac{a}{2},\ \alpha\beta=\dfrac{1}{2}$

$(\alpha+2\beta)(\beta+2\alpha)=\alpha\beta+2\alpha^2+2\beta^2+4\alpha\beta$

$=2(\alpha+\beta)^2+\alpha\beta=\dfrac{a^2}{2}+\dfrac{1}{2}$

題意より $\dfrac{a^2}{2}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{17}{2}$

$a^2=16$

$\therefore a=\pm 4\ /\!/$

$\boxed{3}$ $x^2+(k+2)x+3(k-1)=0$ の 2 つの解の比が $3:4$ となるときの定数 k の値を求めよ。

—解答例—

2 解を $3\alpha,\ 4\alpha$ とおくと、

$$\begin{cases} 3\alpha+4\alpha=-(k+2) \\ 3\alpha\cdot 4\alpha=3(k-1) \end{cases}$$

これを解くと，$(4\alpha+3)(\alpha+1)=0$　$\therefore \alpha=-1,\ -\dfrac{3}{4}$

$\therefore k=5,\ \dfrac{13}{4}\ /\!/$

$\boxed{4}$ $x^2+(q+1)x+p-2=0$ の 2 つの解が、$x^2-2px+q=0$ の 2 つの解にそれぞれ 1 を加えて得られるとき、p , q の値を求めよ。

—解答例—

$x^2-2px+q=0$　の 2 解を $\alpha,\ \beta$ とすると,

$\alpha+\beta=2p,\ \alpha\beta=q\cdots$

$x^2+(q+1)x+p-2=0$ の 2 解は，$\alpha+1,\ \beta+1$ なので,

$$\begin{cases} (\alpha+1)+(\beta+1)=-(q+1) \\ (\alpha+1)\cdot(\beta+1)=p-2 \end{cases}$$

これと　より　$p=0,\ q=-3\ /\!/$

$\boxed{5}$ 次の 2 数を解とする 2 次方程式を求めよ。

(1) $1+\sqrt{5},\ 1-\sqrt{5}$　　(2) $3+\sqrt{2}\,i,\ 3-\sqrt{2}\,i$

(1)

—解答例—

$$\begin{cases} (1+\sqrt{5})+(1-\sqrt{5})=2 \\ (1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})=-4 \end{cases}$$

よって，求める 2 次方程式のひとつは

$x^2-2x-4=0\ /\!/$

(2)

—解答例—

$$\begin{cases} (3+\sqrt{2}\,i)+(3-\sqrt{2}\,i)=6 \\ (3+\sqrt{2}\,i)(3-\sqrt{2}\,i)=11 \end{cases}$$

よって，求める 2 次方程式のひとつは

$x^2-6x+11=0\ /\!/$

$\boxed{6}$ $x^2-3x+5=0$ の 2 つの解を α , β とするとき $1+\dfrac{1}{\alpha}$, $1+\dfrac{1}{\beta}$ を解とする 2 次方程式を作れ。

—解答例—

$\alpha+\beta=3,\ \alpha\beta=5$

$(1+\dfrac{1}{\alpha})+(1+\dfrac{1}{\beta})=2+\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=2+\dfrac{3}{5}=\dfrac{13}{5}$

$(1+\dfrac{1}{\alpha})(1+\dfrac{1}{\beta})=1+\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\alpha\beta}=1+\dfrac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}+\dfrac{1}{\alpha\beta}=\dfrac{9}{5}$

よって，求める 2 次方程式のひとつは

$x^2-\dfrac{13}{5}+\dfrac{9}{5}=0$

$\therefore 5x^2-13x+9=0\ /\!/$

$\boxed{7}$ 次の 2 次式を複素数の範囲で因数分解せよ。

(1) $3x^2-x-1$　　(2) $2x^2+x+1$

(1)

—解答例—

$3x^2-x-1=0$ を解くと、

$x=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{6}$

$\therefore 3x^2-x-1$

$=3\left(x-\frac{1+\sqrt{13}}{6}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{13}}{6}\right)\ /\!/$

(2)

—解答例—

$2x^2+x+1=0$ を解くと、

$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{7}i}{4}$

$\therefore 2x^2+x+1$

$=2\left(x-\frac{-1+\sqrt{7}i}{4}\right)\left(x-\frac{-1-\sqrt{7}i}{4}\right)\ /\!/$

$\boxed{8}$ x^4-2x^2-15 を次の範囲で因数分解せよ。

(1) 有理数

—解答例—

$(x^2-5)(x^2+3)\ /\!/$

(2) 無理数

—解答例—

$(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})(x^2+3)\ /\!/$

(3) 複素数

—解答例—

$(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{3}i)(x-\sqrt{3}i)\ /\!/$

複素数演習　No3　３次方程式の解と係数の関係

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

３次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ の３つの解が α,β,γ
$\iff ax^3+bx^2+cx+d=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$
$\iff ax^3+bx^2+cx+d=ax^3-a(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-\alpha\beta\gamma$
$\iff \alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{b}{a},\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\dfrac{c}{a},\ \alpha\beta\gamma=-\dfrac{d}{a}$
この最後の関係式を、３次方程式の解と係数の関係という。
同じ方法で４次、５次、$\cdots$、を考えることもできる。

例題　３次方程式 $x^3-2x+1=0$ の３つの解を α,β,γ とするとき、次の式の値を求めよ。

(1) $\alpha+\beta+\gamma,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha,\ \alpha\beta\gamma$

(2) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$

方針　解 α,β,γ の対称式の値は、$\alpha+\beta+\gamma,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha,\ \alpha\beta\gamma$ で表して求める。

解答　(1) 解と係数の関係より $\alpha+\beta+\gamma=0,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-2,\ \alpha\beta\gamma=1$

(2) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=0^2-2\times(-2)=4$

$\boxed{1}$　３次方程式 $x^3-3x+2=0$ の３つの解を α,β,γ とするとき、次の式の値を求めよ。

(1) $\alpha+\beta+\gamma,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha,\ \alpha\beta\gamma$

(2) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2$

(3) $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3$

(4) $(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)$

— ヒント —
$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)$

—解答例—

(1) 解と係数の関係から
$\alpha+\beta+\gamma=0,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-3,\ \alpha\beta\gamma=-2$

(2) $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=0^2-2\times(-3)=6$

(3) $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3=(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)+3\alpha\beta\gamma=0+3\times(-2)=-6$

(4) $(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)=(-\gamma)(-\alpha)(-\beta)=-\alpha\beta\gamma=2$

$\boxed{2}$　３次方程式 $x^3+3x^2+5x+10=0$ の３つの解を α,β,γ とするとき、$\alpha+1,\ \beta+1,\ \gamma+1$ を解とする方程式は $x^3+ax+b=0$ である。a,b を求めよ。

—解答例—
解と係数の関係から
$\alpha+\beta+\gamma=-3,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=5,\ \alpha\beta\gamma=-10$
よって
$(\alpha+1)+(\beta+1)+(\gamma+1)=(\alpha+\beta+\gamma)+3=0$
$a=(\alpha+1)(\beta+1)+(\beta+1)(\gamma+1)+(\gamma+1)(\alpha+1)=(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)+2(\alpha+\beta+\gamma)+3=5-6+3=2$
$-c=(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)=(\alpha\beta+\alpha+\beta+1)(\gamma+1)=\alpha\beta\gamma+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha+\beta+\gamma+1=-10+5+(-3)+1=-7$
$\therefore a=2,b=7$

$\boxed{3}$ $x+y+z=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1$ のとき、$(x+y)(y+z)(z+x)=0$ であることを示す。次の空欄を埋めよ。
与条件より
$x+y+z=\boxed{1}$ $\cdots$① , $xy+yz+zx=k$ とおくと, $xyz=\boxed{k}$
従って、解と係数の関係より x,y,z は３次方程式

$$t^3-\boxed{1}\,t^2+\boxed{k}\,t-\boxed{k}=0$$

の解である。
左辺を因数分解して

$$\left(t-\boxed{1}\right)\left(t^2+\boxed{k}\right)=0$$

$t=\boxed{1}$ は解であり、それは x,y,z のいずれかに等しいので

$$\left(x-\boxed{1}\right)\left(y-\boxed{1}\right)\left(z-\boxed{1}\right)=0$$

従って、① より

$$(x+y)(y+z)(z+x)=0$$

が成り立つ。

複素数演習　No4　因数定理

____ 組 ____ 番　氏名 ____________________

$\boxed{1}$ x^3+2x^2-5x-6 を

(1) $x+1$ で割った余りは $\boxed{0}$　$(-1)^3+2(-1)^2-5(-1)-6=0$

(2) $2x-1$ で割った余りは $\boxed{-\frac{63}{8}}$　$(\frac{1}{2})^2+2(\frac{1}{2})-5\cdot\frac{1}{2}-6=-\frac{63}{8}$

$\boxed{2}$ $3x^3-ax^2+2$ を $x+1$ で割ったときの余りが 7 である時、a の値を求めよ。

—解答例—

$f(x)=3x^3-ax^2+2$ とおくと,

$f(-1)=-3-a+2=7$

$\therefore a=-8$

$\boxed{3}$ x^3+4x^2+ax-2 が $x+2$ で割り切れるように、定数 a の値を定めよ。

—解答例—

$f(x)=x^3+4x^2+ax-2$ とおくと

$f(-2)=-8+16-2a-2=0$

$\therefore a=3$

$\boxed{4}$ x^3+2ax^2+bx+4 は $x+1$ で割り切れ、$x-2$ で割ると余りが -6 である。a, b の値を求めよ。

—解答例—

$f(x)=x^3+2ax^2+bx+4$ とおくと

$f(-1)=-1+2a-b+4=0$

$f(2)=8+8a+2b+4=-6$

$\therefore \begin{cases} 2a-b &= -3 \\ 4a+b &= -9 \end{cases}$

これを解いて $a=-2,\ b=-1$

$\boxed{5}$ x^3+ax^2-4x+b が x^2-x-2 で割り切れるように、定数 a, b の値を定めよ。

—解答例—

$x^2-x-2=(x+1)(x-2)$ ゆえ

$f(x)=x^3+ax^2-4x+b$ が $x+1,\ x-2$ で割り切れるので

$f(-1)=-1+a+4+b=0,\ f(2)=8+4a-8+b=0$

$\therefore \begin{cases} a+b &= -3 \\ 4a+b &= 0 \end{cases}$

これを解いて，$a=1,\ b=-4$

$\boxed{6}$ ある整式 $P(x)$ を x^2-3x+2 で割ったときの余りは $4x-2$ であった。この整式を $x-2$ で割ったときの余りを求めよ。

—解答例—

$P(x)=(x^2-3x+2)Q(x)+4x-2$ とおける。

$P(x)$ を x で割った余りは

$P(2)=(4-6+2)Q(2)+8-2=0\cdot Q(2)+6=6$

$\boxed{7}$ 整式 $P(x)$ を $x+2$ で割ると 6 余り、$x+3$ で割ると 5 余るという。$P(x)$ を x^2+5x+6 で割ったときの余りを求めよ。

—解答例—

$P(-2)=6,\ P(-3)=5$ である。

$P(x)=(x^2+5x+6)Q(x)+ax+b$ とおくと

$P(x)=(x+2)(x+3)Q(x)+ax+b$ ゆえ

$P(-2)=-2a+b=6,\ P(-3)=-3a+b=5$

これを解いて $a=1,\ b=8$

$\therefore x+8$

$\boxed{8}$ 整式 $P(x)$ を $x-4$ で割ったら、割り切れて商 $Q(x)$ を得た。次に、$Q(x)$ を $x+3$ で割ったら、余り 7 を得た。$P(x)$ を $x+3$ で割ったときの余りを求めよ。

—解答例—

$P(x)=(x-4)Q(x),\ Q(x)=(x+3)Q'(x)+7$ と書ける。

求める余りは $P(-3)=(-3-4)Q(-3)=(-7)\cdot\{0\cdot Q'(-3)+7\}=-49$

$\boxed{9}$ 次の式を因数分解せよ。

(1) x^3-4x^2+x+6

—解答例—

$-1-4-1+6=0$ ゆえ

$x+1$ で割り切れる。

-1	1	-4	1	6
		-1	5	-6
	1	-5	6	0

$\therefore$ 与式 $=(x+1)(x^2-5x+6)$

$=(x+1)(x-2)(x-3)$

(2) x^4-2x^2-3x-2

—解答例—

$1-2+3-2=0,\ 16-8-6-2=0$

ゆえ $(x+1)(x-2)$ で割り切れる。

-1	1	0	-2	-3	-2
		-1	1	1	2
2	1	-1	-1	-2	0
		2	2	2	
	1	1	1	0	

$\therefore$ 与式 $=(x+1)(x-2)(x^2+x+1)$

(3) $x^4-4x^3+16x-16$

—解答例—

$16-32+32-16=0,16+32-32-16=0$ ゆえ $(x-2)(x+2)$ で割り切れる。

2	1	-4	0	16	-16
		2	-4	-8	16
-2	1	-2	-4	8	0
		-2	8	-8	
	1	-4	4	0	

$\therefore$ 与式

$=(x-2)(x+2)(x^2-4x+4)$

$=(x-2)^3(x+2)$

(4) $12x^3-8x^2-3x+2$

—解答例—

与式 $=3x(4x^2-1)-2(4x^2-1)$

$=(3x-2)(2x+1)(2x-1)$

【注意】

因数定理を使うときは,

$f\left(\pm\dfrac{2\text{ の約数}}{12\text{ の約数}}\right)=0$?

をチェックする。

複素数演習　No5　高次方程式

____ 組 ____ 番　氏名 ____________________

$\boxed{1}$ 次の高次方程式を解け。

(1) $x^3 - x^2 - 4x - 2 = 0$

—解答例—

$P(x) = x^3 - x^2 - 4x - 2$ とおくと $P(-1) = -1 - 1 + 4 - 2 = 0$

与式は $(x+1)(x^2 - 2x - 2) = 0$

$\therefore x = -1, 1 \pm \sqrt{3}$

-1	1	-1	-4	-2
		-1	2	2
	1	-2	-2	0

(2) $x^4 - 5x^3 + x^2 + 9x + 2 = 0$

—解答例—

$P(x) = x^4 - 5x^3 + x^2 + 9x + 2$ とおくと $P(-1) = 0,\ P(2) = 0$

与式は

$(x+1)(x-2)(x^2 - 4x - 1) = 0$

$\therefore x = -1, 2, 2 \pm \sqrt{5}$

-1	1	-5	1	9	2
		-1	6	-7	-2
2	1	-6	7	2	0
		2	-8	-2	
	1	-4	-1	0	

(3) $x^4 + 4x^3 + 4x^2 - x - 2 = 0$

—解答例—

$P(x) = x^4 + 4x^3 + 4x^2 - x - 2$ とおくと $P(-1) = 0,\ P(-2) = 0$

与式は

$(x+1)(x+2)(x^2 + x - 1) = 0$

$\therefore x = -1, -2, \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

-1	1	4	4	-1	-2
		-1	-3	-1	2
-2	1	3	1	-2	0
		-2	-2	2	
	1	1	-1	0	

(4) $(x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) = 3$

—解答例—

$x^2 + 5x = X$ とおくと

$(X+4)(X+6) = 3$

$\therefore X^2 + 10X + 21 = 0$

$\therefore (X+3)(X+7) = 0$

$\therefore (x^2 + 5x + 3)(x^2 + 5x + 7) = 0$

$\therefore x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{13}}{2}, \dfrac{-5 \pm \sqrt{3}i}{2}$

(5) $x^3 = -1$

—解答例—

$x^3 + 1 = 0$

$\therefore (x+1)(x^2 - x + 1) = 0$

$\therefore x = -1, \dfrac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

(6) $x^4 + x^2 - 2 = 0$

—解答例—

$(x^2 - 1)(x^2 + 2) = 0$

$\therefore x = \pm 1, \pm\sqrt{2}i$

(7) $x^4 + x^2 + 1 = 0$

—解答例—

$(x^2 + 1)^2 - x^2 = 0$

$\therefore (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1) = 0$

$\therefore x = \dfrac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}, \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

$\boxed{2}$ $x^4 + ax^3 + ax^2 + 11x + b = 0$ が、3 と -2 を解に持つとき、定数 $a,\ b$ の値、および残りの解を求めよ。

—解答例—

$P(x) = x^4 + ax^3 + ax^2 + 11x + b$ とおくと

$P(3) = 81 + 27a + 9a + 33 + b = 0$

$P(-2) = 16 - 8a + 4a - 22 + b = 0$

これを解いて $a = -3,\ b = -6$

3	1	-3	-3	11	-6
		3	0	-9	6
-2	1	0	-3	2	0
		-2	4	-2	
	1	-2	1	0	

残りの解は $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 = 0$ を解いて $x = 1$

$\boxed{3}$ $x^3 + ax^2 + bx + 6 = 0$ の 1 つの解が $1 + i$ であるとき、実数 $a,\ b$ の値と残りの解を求めよ。

—解答例—

係数が実数ゆえ $1 - i$ も解である。よって，$\{x - (1+i)\}\{x - (1-i)\} = x^2 - 2x + 2$ で割り切れる。実際にわり算すると $x^3 + ax^2 + bx + 6 = (x^2 - 2x + 2)(x + a + 2) + (2a + b + 2)x + (-2a + 2)$ 割り切れるので，$2a + b + 2 = 0,\ 2a - 2 = 0.$ これを解いて $a = 1,\ b = -4$ 残りの解は $x = -3$

$\boxed{4}$ 縦 $6cm$, 横が $10cm$ の長方形の厚紙の 4 すみから一辺 xcm の正方形を切り落とし、折り曲げて、容積が $24cm^3$ の直方体の箱を作りたい。x の値を求めよ。

—解答例—

$x > 0,\ 6 - 2x > 0,\ 10 - 2x > 0$ から $0 < x < 3$

このとき体積を比べて

$x(6 - 2x)(10 - 2x) = 24$

$\therefore x(x-3)(x-5) = 6$

展開整理して

$x^3 - 8x^2 + 15x - 6 = 0$

左辺を $P(x)$ とおくと $P(2) = 0$

2	1	-8	15	-6
		2	-12	6
	1	-6	3	0

与式は $(x-2)(x^2 - 6x + 3) = 0$

$\therefore x = 2,\ 3 \pm \sqrt{6}$

$0 < x < 3$ ゆえ $x = 2,\ 3 - \sqrt{6}$

$\boxed{5}$ 立方体の縦を $2cm$, 横を $3cm$ それぞれ伸ばし、高さを $1cm$ 縮めて直方体を作ったら体積が $60cm^3$ になった。もとの立方体の一辺の長さを求めよ。

—解答例—

求める長さを $x$cm とすると,

$(x+2)(x+3)(x-1) = 60\ (x > 1)$ となる。展開整理して $x^3 + 4x^2 + x - 66 = 0$

$P(x) =$ 左辺 とおくと $P(3) = 0$

$\therefore (x-3)(x^2 + 7x + 22) = 0$

$x > 1$ ゆえ $x = 3$

3	1	4	1	-66
		3	21	66
	1	7	22	0

$\boxed{6}$ 1 の立方根の虚数解の 1 つを ω とするとき

(1) $\omega^{20} + \omega^{19} + \omega^{18} + 1$ の値を求めよ。

—解答例—

与式 $= \omega^{18}(\omega^2 + \omega + 1) + 1 = 1$

(2) $x^3 = 8$ の解は、$2,\ 2\omega,\ 2\omega^2$ であることを示せ。

—解答例—

$\left(\dfrac{x}{2}\right)^3 = 1 \therefore \dfrac{x}{2} = 1, \omega, \omega^2 \therefore x = 2, 2\omega, 2\omega^2$

図形と式演習　No1　点の座標

____組____番　氏名____________________

$\boxed{1}$ 次の 2 点間の距離を求めよ。

(1) $(-2, 3),\ (4, -3)$　　　　(2) $(2, -4),\ (-3, 8)$

—解答例—
$\sqrt{(4+2)^2+(-3-3)^2}$
$= 6\sqrt{2}$ //

—解答例—
$\sqrt{(-3-2)^2+(8+4)^2}$
$= 13$ //

$\boxed{2}$ 3 点 $A(2,1), B(0,-3), C(6,-1)$ を頂点とする三角形はどんな三角形か。

—解答例—
AB$=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$
BC$=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$
CA$=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$
AB=CA, $\text{BC}^2=\text{AB}^2+\text{CA}^2$
$\therefore$ ∠ A が直角の直角二等辺三角形 //

$\boxed{3}$ 2 点 $A(4,-1)$, $B(-2,3)$ から等距離にある y 軸上の点 P の座標を求めよ。

—解答例—
$P(0,\ p)$ とおく。
AP=BP より $\text{AP}^2=\text{BP}^2$
$(0-4)^2+(p+1)^2=(0+2)^2+(p-3)^2$
$p^2+2p+17=p^2-6p+13$
$\therefore p=-\dfrac{1}{2}$
$\therefore P\left(0,\ -\dfrac{1}{2}\right)$ //

$\boxed{4}$ 2 点 $A(-2,1)$, $B(3,4)$ から等距離にあり、しかも直線 $y=-x$ 上にある点 P の座標を求めよ。

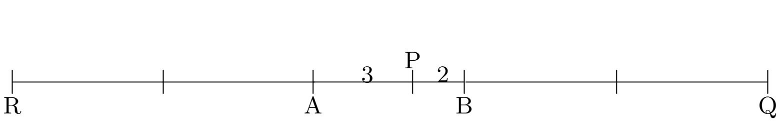
—解答例—
$P(t,\ -t)$ とおく。
AP=BP より $\text{AP}^2=\text{BP}^2$
$(t+2)^2+(-t-1)^2=(t-3)^2+(-t-4)^2$
$2t^2+6t+5=2t^2+2t+25$
$\therefore t=5$
$\therefore P(5,\ -5)$ //

$\boxed{5}$ 次の点 P , Q , R を図示せよ。

(1) 線分 AB を 3 : 2 に内分する点 P

(2) 線分 AB を 3 : 2 に外分する点 Q

(3) 線分 AB を 2 : 3 に外分する点 R



—解答例—

$\boxed{6}$ 3 点 $A(6,1)$, $B(2,-4)$, $C(-1,5)$ について次の点を求めよ。

(1) 線分 AB を 2 : 3 に内分する点 $\boxed{\left(\dfrac{22}{5},\ -1\right)}$

(2) 線分 AB を 3 : 5 に外分する点 $\boxed{\left(12,\ \dfrac{17}{2}\right)}$

(3) △ABC の重心 $\boxed{\left(\dfrac{7}{3},\ \dfrac{2}{3}\right)}$

$\boxed{7}$ 点 $A(2,3)$ の点 $P(4,-2)$ に関する対称点 B の座標を求めよ。

—解答例—
$B(x,\ y)$ とおくと，AB の中点が P なので
$$\begin{cases} \dfrac{x+2}{2}=4 \\ \dfrac{y+3}{2}=-2 \end{cases}$$
$\therefore x=6,\ y=-7$
$\therefore B(6,\ -7)$ //

$\boxed{8}$ △ABC の辺 AB , BC , CA の中点がそれぞれ $(-2,3),\ (3,-1),\ (5,4)$ であるとき A , B , C の座標を求めよ。

—解答例—
$A(x_1,\ y_1), B(x_2,\ y_2), C(x_3,\ y_3)$ とおくと，
$$\begin{cases} \dfrac{x_1+x_2}{2}=-2 \\ \dfrac{x_2+x_3}{2}=3 \\ \dfrac{x_3+x_1}{2}=5 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{y_1+y_2}{2}=3 \\ \dfrac{y_2+y_3}{2}=-1 \\ \dfrac{y_3+y_1}{2}=4 \end{cases}$$
これを解くと，
$x_1=0,\ x_2=-4,\ x_3=10$
$y_1=8,\ y_2=-2,\ y_3=0$
$\therefore A(0,\ 8), B(-4,\ -2), C(10,\ 0)$ //

$\boxed{9}$ 3 点 $A(-2,3), B(5,4), C(3,-1)$ を 3 つの頂点とする平行四辺形 ABCD の頂点 D の座標を求めよ。

—解答例—
$D(x,\ y)$ とおくと，AC の中点と BD の中点が一致するので
$$\begin{cases} \dfrac{-2+3}{2}=\dfrac{5+x}{2} \\ \dfrac{3-1}{2}=\dfrac{4+y}{2} \end{cases}$$
$\therefore x=-4,\ y=-2$
$\therefore D(-4,\ -2)$ //

$\boxed{10}$ △ABC の辺 BC を 1 : 2 に内分する点を D とすれば

$$2\text{AB}^2+\text{AC}^2=3(\text{AD}^2+2\text{BD}^2)$$

が成り立つことを証明せよ。

—解答例—
△ ABC を B，C が x 軸上にあって，D が原点にくるようにとる。
$A(a,b), B(-c,0), C(2c,0), D(0,0)$ とおくと，
$2\text{AB}^2+\text{AC}^2=2\{(\text{a}+\text{c})^2+\text{b}^2\}+\{(\text{a}-2\text{c})^2+\text{b}^2\}$
$\qquad =3a^2+3b^2+6c^2$
$3(\text{AD}^2+2\text{BD}^2)=3\{(\text{a}^2+\text{b}^2)+2\text{c}^2\}$
$\qquad =3a^2+3b^2+6c^2$
$\therefore 2\text{AB}^2+\text{AC}^2=3(\text{AD}^2+2\text{BD}^2)$ //

図形と式演習　No2　直線の方程式 (1)

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ 次の直線の方程式を求めよ。

(1) 点 $(-2,3)$ を通り傾きが 4

—解答例—

$y-3=4(x+2)$

$y=4x+11$

$\therefore 4x-y+11=0$ //

(2) 2 点 $(-2,3)$, $(5,-6)$ を通る

—解答例—

$y-3=\dfrac{-6-3}{5+2}(x+2)$

$y-3=-\dfrac{9}{7}(x+2)$

$\therefore 9x+7y-3=0$ //

(3) 点 $(-3,2)$ を通り y 軸に平行

—解答例—

$\therefore x=-3$ //

(4) x 切片が 3 , y 切片が -4

—解答例—

$\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{-4}=1$

$\therefore 4x-3y=12$ //

$\boxed{2}$ 3 点 $\mathrm{A}(-3,1)$, $\mathrm{B}(2,-4)$, $\mathrm{C}(a,5)$ が一直線上にあるように定数 a の値を定めよ。

—解答例—

$\mathrm{A}(-3,1)$, $\mathrm{B}(2,-4)$ を通る直線は

$y-1=\dfrac{-4-1}{2+3}(x+3)$

$\therefore x+y+2=0$

これが点 C $(a,5)$ を通るので,

$a+5+2=0$

$\therefore a=-7$ //

$\boxed{3}$ 3 直線 $2x-y-8=0$, $3x+4y-1=0$, $ax-2y+3=0$ が 1 点で交わるように、定数 a の値を定めよ。

—解答例—

2 直線 $2x-y-8=0$, $3x+4y-1=0$ の交点は $(3,\ -2)$

点 $(3,\ -2)$ が $ax-2y+3=0$ 上にあるので,

$3a+4+3=0$

$\therefore a=-\dfrac{7}{3}$ //

$\boxed{4}$ 点 $(1,-2)$ を通り直線 $3x+4y+2=0$ に平行な直線及び垂直な直線の方程式を求めよ。

—解答例—

直線 $3x+4y+2=0$ を変形すると

$y=-\dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{2}\cdots$

点 $(1,-2)$ を通り　に平行な直線の方程式は

$y+2=-\dfrac{3}{4}(x-1)$

$\therefore 3x+4y+5=0$ //

点 $(1,-2)$ を通り　に垂直な直線の傾きは $\dfrac{4}{3}$ なので

垂直な直線の方程式は

$y+2=\dfrac{4}{3}(x-1)$

$\therefore 4x-3y-10=0$ //

$\boxed{5}$ 2 点 $\mathrm{A}(5,3)$ $\mathrm{B}(2,4)$ を結ぶ線分 AB の垂直 2 等分線を求めよ。

—解答例—

AB の中点は $\left(\dfrac{5+2}{2},\ \dfrac{3+4}{2}\right)=\left(\dfrac{7}{2},\ \dfrac{7}{2}\right)$

線分 AB の傾きは $\dfrac{3-4}{5-2}=-\dfrac{1}{3}$

よって，求める直線の傾きは 3 なので

$\therefore y-\dfrac{7}{2}=3\left(x-\dfrac{7}{2}\right)$

$\therefore 3x-y-7=0$ //

$\boxed{6}$ 直線 $3x-2y+6=0$ について、点 $\mathrm{A}(3,1)$ と対称な点の座標を求めよ。

—解答例—

求める点を $\mathrm{B}(a,\ b)$ とおくと,

AB の中点 $\left(\dfrac{a+3}{2},\ \dfrac{b+1}{2}\right)$ が直線 $3x-2y+6=0$ 上にあるので,

$3\times\dfrac{a+3}{2}-2\times\dfrac{b+1}{2}+6=0$

$\therefore 3a-2b+19=0\cdots$

また，直線 AB と直線 $3x-2y+6=0$ は直交するので,

$\dfrac{b-1}{a-3}\times\dfrac{3}{2}=-1$

$\therefore 2a+3b-9=0\cdots$

を解くと，$a=-3,\ b=5$　　$\therefore (-3,\ 5)$ //

図形と式演習　No3　直線の方程式 (2)

____ 組 ____ 番　氏名 ____________________

$\boxed{1}$ 2 直線 $(a-1)x+(a+3)y=1$, $x+ay=1$ が

(1) 垂直となるときの a の値を求めよ。

(2) 平行（一致する時を除く）となるときの a の値を求めよ。

—解答例—

(1) $(a-1)\cdot 1+(a+3)\cdot a=0$

$a^2+4a-1=0$

$\therefore a=-2\pm\sqrt{5}$ //

(2) $(a-1)\cdot a-(a+3)\cdot 1=0$

$a^2-2a-3=0$

$(a-3)(a+1)=0 \qquad \therefore a=3,\ -1$

)$a=3$ のとき，2 直線は $2x+6y=1,\ x+3y=1$

)$a=-1$ のとき，2 直線は $-2x+2y=1,\ x-y=1$

となり　)　) のどちらの 2 直線も一致しないので，$\therefore a=3,\ -1$ //

$\boxed{2}$ 2 直線 $ax+by=7$, $bx+cy=4$ が点 $(2,1)$ で垂直に交わるときの a , b , c の値を求めよ。

—解答例—

2 直線は垂直に交わるので，$ab+bc=0\cdots$

またどちらの直線も点 $(2,1)$ を通るので，

$\begin{cases} 2a+b=7 \\ 2b+c=4 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} a=\frac{1}{2}(7-b) \\ c=4-2b \end{cases}$

に代入して

$\frac{1}{2}(7-b)\cdot b+b\cdot(4-2b)=0$　整理すると

$b(b-3)=0 \qquad \therefore b=0,\ 3$

・$b=0$ のとき，$a=\dfrac{7}{2},\ c=4$

・$b=3$ のとき，$a=2,\ c=-2$

$\therefore (a,\ b,\ c)=(\dfrac{7}{2},\ 0,\ 4),(2,\ 3,\ -2)$ //

$\boxed{3}$ 3 直線 $x-2y+2=0$, $3x+2y=12$, $ax-y=a-1$ が三角形を作らないような定数 a の値を求めよ。

—解答例—

) 2 直線 $x-2y+2=0$ と $3x+2y=12$ の交点は，$\left(\dfrac{5}{2},\ \dfrac{9}{4}\right)$

直線 $ax-y=a-1$ が交点を通るとき三角形を作らないので

$\dfrac{5}{2}a-\dfrac{9}{4}=a-1 \qquad \therefore a=\dfrac{5}{6}$

)2 直線 $x-2y+2=0$ と $ax-y=a-1$ が平行のとき，三角形を作らないので，

$-1+2a=0 \qquad \therefore a=\dfrac{1}{2}$

)2 直線 $3x+2y=12$, $ax-y=a-1$ が平行のとき，三角形を作らないので，

$-3-2a=0 \qquad \therefore a=-\dfrac{3}{2}$

よって　)　)　) より $\therefore a=\dfrac{5}{6},\ \dfrac{1}{2},\ -\dfrac{3}{2}$ //

$\boxed{4}$ 点 $\mathrm{A}(2,-3)$ と直線 $4x+3y=4$ との距離を求めよ。

—解答例—

$\dfrac{|4\times 2+3\times(-3)-4|}{\sqrt{4^2+3^2}}=1$ //

$\boxed{5}$ 3 点 $\mathrm{A}(-2,3)$, $\mathrm{B}(1,2)$, $\mathrm{C}(5,5)$ がある。A から辺 BC に下ろした垂線の長さを求めよ。

—解答例—

直線 BC の方程式は

$y-2=\dfrac{5-2}{5-1}(x-1) \qquad \therefore 3x-4y+5=0$

よって点 A から辺 BC に下ろした垂線の長さは

$\dfrac{|3\times(-2)+(-4)\times 3+5|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\dfrac{13}{5}$ //

$\boxed{6}$ 次の 3 点を頂点とする三角形の面積を求めよ。

(1) $(0,0),\ (2,6),\ (-3,7)$

—解答例—

2 点 $(2,6),\ (-3,7)$ を通る直線の方程式は

$y-6=\dfrac{7-6}{-3-2}(x-2) \qquad \therefore x+5y-32=0\cdots$

原点 (0,0) から　に下ろした垂線の長さは

$\dfrac{|-32|}{\sqrt{1^2+5^2}}=\dfrac{32}{\sqrt{26}}=\dfrac{16\sqrt{26}}{13}$

また 2 点 $(2,6),\ (-3,7)$ 間の距離は $\sqrt{(-3-2)^2+(7-6)^2}=\sqrt{26}$

$\therefore$ 三角形の面積 $\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{26}\cdot\dfrac{32}{\sqrt{26}}=16$ //

(2) $(-2,1),\ (3,-1),\ (1,5)$

—解答例—

2 点 $(-2,1),\ (3,-1)$ を通る直線の方程式は

$y-1=\dfrac{-1-1}{3+2}(x+2) \qquad \therefore 2x+5y-1=0\cdots$

点 $(1,\ 5)$ から　に下ろした垂線の長さは

$\dfrac{|2\times 1+5\times 5-1|}{\sqrt{2^2+5^2}}=\dfrac{26}{\sqrt{29}}$

また 2 点 $(-2,1),\ (3,-1)$ 間の距離は $\sqrt{(3+2)^2+(-1-1)^2}=\sqrt{29}$

$\therefore$ 三角形の面積 $\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{29}\cdot\dfrac{26}{\sqrt{29}}=13$ //

$\boxed{7}$ 3 直線 $3x+2y=12$, $x+y=3$, $2x-y=-6$ で囲まれる三角形の面積を求めよ。

—解答例—

$\begin{cases} 3x+2y=12 & \cdots① \\ x+y=3 & \cdots② \\ 2x-y=-6 & \cdots③ \end{cases}$

と　の交点を A，　と　の交点を B，　と　の交点を C とすると，連立方程式をそれぞれ解いて

$\mathrm{A}(6,\ -3),\ \mathrm{B}(-1,\ 4),\ \mathrm{C}(0,\ 6)$

直線 AB の方程式は

$y+3=\dfrac{4+3}{-1-6}(x-6) \qquad \therefore x+y-3=0$

点 C と直線 AB の距離は

$\dfrac{|1\times 0+1\times 6-3|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$

また線分 AB の距離は $\sqrt{(6+1)^2+(-3-4)^2}=7\sqrt{2}$

$\therefore$ 三角形の面積 $\dfrac{1}{2}\cdot 7\sqrt{2}\cdot\dfrac{3}{\sqrt{2}}=\dfrac{21}{2}$ //

図形と式演習　No4　円の方程式

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ 次の円の方程式を求めよ。

(1) 中心が $(3,-2)$ で $(-2,10)$ を通る円

—解答例—

半径を r とすると

$r^2=(3+2)^2+(-2-10)^2=169$

$\therefore (x-3)^2+(y+2)^2=169$ //

(2) 2 点 $(2,-3)$, $(4,-7)$ を直径の両端とする円

—解答例—

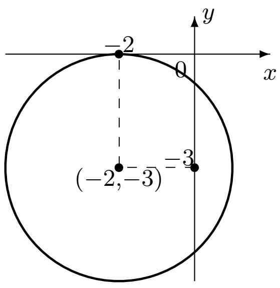
中心 $\left(\dfrac{2+4}{2},\ \dfrac{-3-7}{2}\right)=(3,\ -5)$

半径 $r^2=(3-2)^2+(-5+3)^2=5$

$\therefore (x-3)^2+(y+5)^2=5$ //

(3) 中心が $(-2,-3)$ で x 軸に接する円

—解答例—

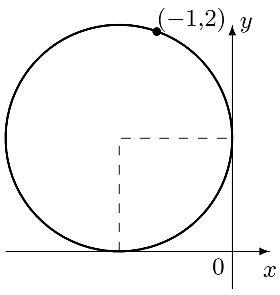


半径を r とすると $r=|-3|=3$

$\therefore (x+2)^2+(y+3)^2=9$ //

(4) $(-1,2)$ を通り両軸に接する円

—解答例—



第 2 象限の点を通るので、中心を $(-a,\ a)$ と

おくと，$(a>0)$

求める円の方程式は

$(x+a)^2+(x-a)^2=a^2$

これが点 $(-1,2)$ を通るので、

$(-1+a)^2+(2-a)^2=a^2$

$a^2-6a+5=0$

$(a-5)(a-1)=0 \qquad \therefore a=5,\ 1$

$$\therefore \begin{cases}(x+5)^2+(y-5)^2=25\\ (x+1)^2+(y-1)^2=1\end{cases}$$ //

(5) 3 点 $(1,0)$, $(2,-1)$, $(3,2)$ を通る円

—解答例—

求める円の方程式を $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とおく。

点 $(1,0)$ を通るので

$l+n+1=0\cdots$①

点 $(2,-1)$ を通るので

$2l-m+n+5=0\cdots$②

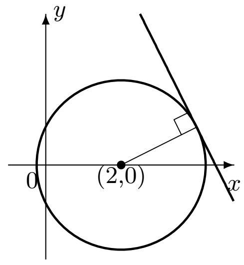
点 $(3,2)$ を通るので

$3l+2m+n+13=0\cdots$③

① , ② , ③ を解くと $l=-5,\ m=-1,\ n=4$

$\therefore x^2+y^2-5x-y+4=0$ //

(6) $(2,0)$ を中心とし直線 $2x+y=9$ に接する円



—解答例—

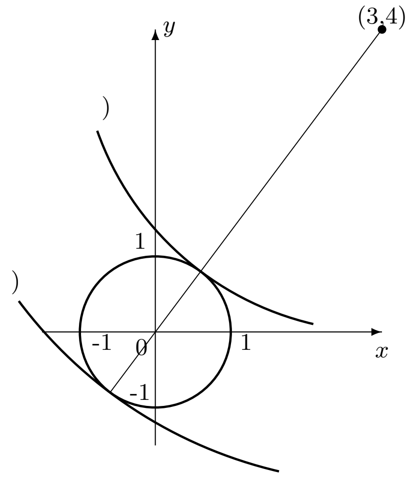
点 $(2,0)$ と直線 $2x+y=9$ の距離は

$$\frac{|2\times2+1\times0-9|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{5}{\sqrt5}=\sqrt5$$

$\therefore (x-2)^2+y^2=5$ //

(7) $(3,4)$ を中心とし円 $x^2+y^2=1$ に接する円

—解答例—



) 円 $x^2+y^2=1$ に外接するとき

半径 $\sqrt{3^2+4^2}-1=4$

$\therefore (x-3)^2+(y-4)^2=16$ //

) 円 $x^2+y^2=1$ と内接するとき

半径 $\sqrt{3^2+4^2}+1=6$

$\therefore (x-3)^2+(y-4)^2=36$ //

$\boxed{2}$ 次の円の中心と半径を求めよ。

(1) $x^2+y^2+2x-6y+6=0$

—解答例—

$(x+1)^2-1+(y-3)^2-9+6=0$

$\therefore (x+1)^2+(y-3)^2=4$

中心 $(-1,\ 3)$ 半径 2 の円 //

(2) $y^2=x(4-x)$

—解答例—

$x^2-4x+y^2=0$

$(x-2)^2-4+y^2=0$

$\therefore (x-2)^2+y^2=4$

中心 $(2,\ 0)$ 半径 2 の円 //

$\boxed{3}$ 次の式が円を表すときの m の値の範囲を求めよ。

$$x^2+y^2+4x-2y=-m^2+4m+7$$

—解答例—

$(x+2)^2-4+(y-1)^2-1=-m^2+4m+7$

$(x+2)^2+(y-1)^2=-m^2+4m+12$

円を表すとき $-m^2+4m+12>0$

$m^2-4m-12<0$

$(m-6)(m+2)<0$

$-2<m<6$ //

図形と式演習　No5　円と直線 (1)

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ 円 $x^2+y^2=8$ と直線 $y=x-1$ の交点を P , Q とする。ただし P の x 座標は Q の x 座標よりも大きいものとする。

(1) P , Q の座標を求めよ。

—解答例—

$$\begin{cases} x^2+y^2=8 & \cdots ① \\ y=x-1 & \cdots ② \end{cases}$$

を　に代入すると

$x^2+(x-1)^2=8$

$2x^2-2x-7=0 \qquad \therefore x=\dfrac{1\pm\sqrt{15}}{2}$

y に代入して　$\therefore y=\dfrac{-1\pm\sqrt{15}}{2}$

$\therefore \mathrm{P}\left(\dfrac{1+\sqrt{15}}{2},\ \dfrac{-1+\sqrt{15}}{2}\right), \mathrm{Q}\left(\dfrac{1-\sqrt{15}}{2},\ \dfrac{-1-\sqrt{15}}{2}\right)$ //

(2) PQ の長さを求めよ。

—解答例—

原点 O から直線 PQ に下ろした垂線の足を H とすると、

原点 O と直線 $x-y-1=0$ の距離 OH は

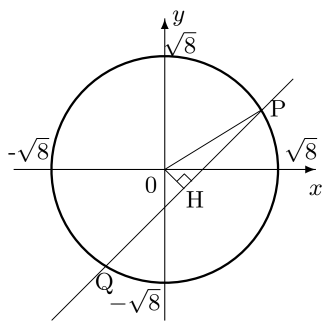
$\mathrm{OH}=\dfrac{|-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

三平方の定理より

$\mathrm{PH}^2=\sqrt{8}^2-\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\dfrac{15}{2}$

$\therefore \mathrm{PH}=\sqrt{\dfrac{15}{2}}=\dfrac{\sqrt{30}}{2}$

$\therefore \mathrm{PQ}=2\times\dfrac{\sqrt{30}}{2}=\sqrt{30}$ //



$\boxed{2}$ 円 $x^2+y^2=4$ と直線 $y=3x+n$ が接するときの n の値を求めよ。

—解答例—

原点 O から直線 $y=3x+n$ に下ろした垂線の足を H とすると、

原点 O と直線 $3x-y+n=0$ の距離 OH は

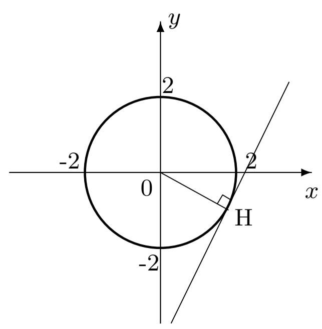
$\mathrm{OH}=\dfrac{|n|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=\dfrac{|n|}{\sqrt{10}}$

接することより OH=2

$\therefore \dfrac{|n|}{\sqrt{10}}=2$

$|n|=2\sqrt{10}$

$\therefore n=\pm2\sqrt{10}$ //



$\boxed{3}$ 直線 $2x-y=k$ と円 $x^2+y^2=5$ が 2 点で交わるときの k の値の範囲を求めよ。

—解答例—

原点 O から直線 $2x-y=k$ に下ろした垂線の足を H とすると、

原点 O と直線 $2x-y-k=0$ の距離 OH は

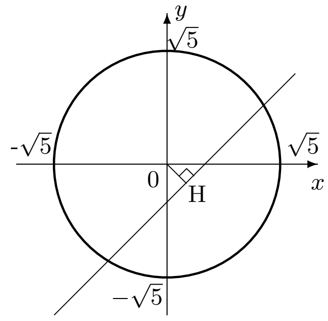
$\mathrm{OH}=\dfrac{|-k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\dfrac{|k|}{\sqrt{5}}$

円と直線が 2 点で交わることより OH$<\sqrt{5}$

$\therefore \dfrac{|k|}{\sqrt{5}}<\sqrt{5}$

$|k|<5$

$\therefore -5<k<5$ //



$\boxed{4}$ 点 $\mathrm{A}(3,1)$ から円 $x^2+y^2=5$ に引いた接線の方程式を求めよ。また点 A と接点の距離を求めよ。

—解答例—

接点を $(x_0,\ y_0)$ とおくと、接点は円 $x^2+y^2=5$ 上にあるので

$x_0^2+y_0^2=5\cdots$

接点 $(x_0,\ y_0)$ における接線の方程式は

$x_0x+y_0y=5$

これが $(3,\ 1)$ を通ることより

$3x_0+y_0=5\cdots$

により $y_0=5-3x_0$ を　に代入すると

$x_0^2+(5-3x_0)^2=5$　整理して

$x_0^2-3x_0+2=0$

$(x_0-2)(x_0-1)=0 \qquad \therefore x_0=2,\ 1 \qquad \therefore y_0=-1,\ 2$

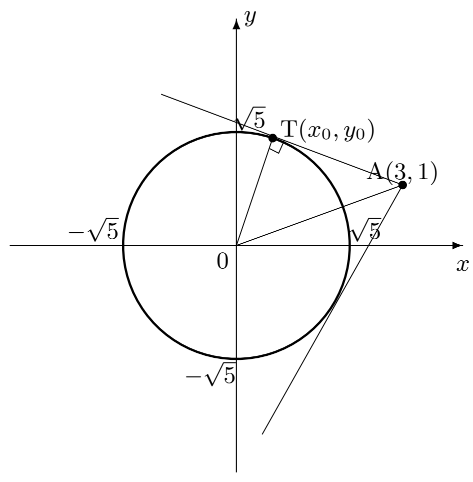
$\therefore$ 接点 $(2,\ -1)$ における接線の方程式は $2x-y=5$

接点 $(1,\ 2)$ における接線の方程式は $x+2y=5$ //

接点を T とすると

$\mathrm{OA}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$

$\therefore \mathrm{AT}=\sqrt{\sqrt{10}^2-\sqrt{5}^2}=\sqrt{5}$ //



図形と式演習　No6　円と直線 (2)

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ (　　) 内の点における接線の方程式を求めよ。

(1) $x^2+y^2=25$　$(4,-3)$

—解答例—

$4x-3y=25$ //

(2) $x^2+y^2=9$　$(0,-3)$

—解答例—

$-3y=9$

$\therefore y=-3$ //

(3) $(x-1)^2+(y-2)^2=25$　$(4,6)$

—解答例—

$(1,2),(4,6)$ を通る直線の傾きは $\dfrac{6-2}{4-1}=\dfrac{4}{3}$

求める接線の傾きは $(1,2),(4,6)$ を通る直線に垂直となるので $-\dfrac{3}{4}$

よって求める接線の方程式は

$y-6=-\dfrac{3}{4}(x-4)$　　$\therefore 3x+4y=36$ //

（別解）$(4-1)(x-1)+(6-2)(y-2)=25$

$\therefore 3x+4y=36$ //

$\boxed{2}$ 円 $x^2+y^2=13$ の接線で点 $(5,1)$ を通るものを求めよ。

—解答例—

接点を $(x_0,\ y_0)$ とおくと、接点は円 $x^2+y^2=13$ 上にあるので

$x_0^2+y_0^2=13\cdots$

接点 $(x_0,\ y_0)$ における接線の方程式は

$x_0x+y_0y=13$

これが $(5,\ 1)$ を通ることより

$5x_0+y_0=13\cdots$

により $y_0=13-5x_0$ を　に代入すると

$x_0^2+(13-5x_0)^2=13$　整理して

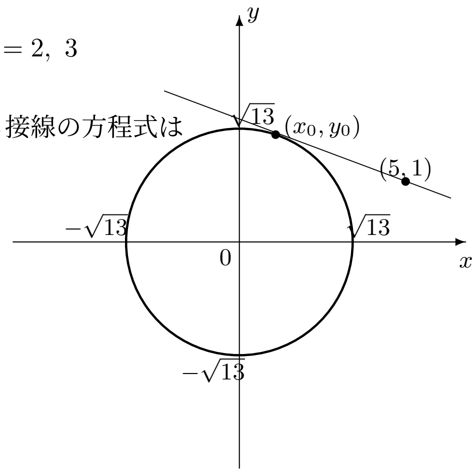
$x_0^2-5x_0+6=0$

$(x_0-2)(x_0-3)=0$　　$\therefore x_0=2,\ 3$

$\therefore y_0=3,\ -2$

$\therefore$ 接点 $(2,\ 3),(3,\ -2)$ における接線の方程式は

$\begin{cases} 2x+3y=13 \\ 3x-2y=13 \end{cases}$ //



$\boxed{3}$ 2 直線 $3x+4y+5=0$, $2x-3y=8$ の交点を通り、点 $(-4,6)$ を通る直線の方程式を求めよ。

—解答例—

$3x+4y+5+k(2x-3y-8)=0\cdots$　　は

2 直線 $3x+4y+5=0$, $2x-3y=8$ の交点を通る図形を表すので

点 $(-4,6)$ を　に代入して

$-12+24+5+k(-8-18-8)=0$　　$\therefore k=\dfrac{1}{2}$

より

$3x+4y+5+\dfrac{1}{2}(2x-3y-8)=0$

$\therefore 8x+5y+2=0$

これは直線を表すから、これが求めるものである。 //

$\boxed{4}$ 2 円 $x^2+y^2-16=0,\quad x^2+y^2-4x-2y-8=0$ がある。次の図形の方程式を求めよ。

(1) 2 円の交点と原点を通る円

—解答例—

$x^2+y^2-16+k(x^2+y^2-4x-2y-8)=0\cdots$　　は

2 円 $x^2+y^2-16=0,\quad x^2+y^2-4x-2y-8=0$ の交点を通る図形を表すので

原点 $(0,0)$ を　に代入して

$-16-8k=0$　　$\therefore k=-2$

より

$x^2+y^2-16-2(x^2+y^2-4x-2y-8)=0$

$\therefore x^2+y^2-8x-4y=0$

これは円を表すから、これが求めるものである。 //

(2) 2 円の交点を通る直線（共通弦）

—解答例—

$x^2+y^2-16+k(x^2+y^2-4x-2y-8)=0\cdots$　　は

2 円 $x^2+y^2-16=0,\quad x^2+y^2-4x-2y-8=0$ の交点を通る図形を表すので

直線であることより $k=-1$

より

$x^2+y^2-16-(x^2+y^2-4x-2y-8)=0$

$\therefore 2x+y-4=0$

これは直線を表すから、これが求めるものである。 //

図形と式演習　No7　軌跡

____ 組 ____ 番　氏名 ______________________

$\boxed{1}$ 次の条件を満たす点 P の軌跡を求めよ。

(1) 2 点 A$(-1,0)$, B$(1,2)$ から等距離にある

—解答例—

条件を満たす点 P の座標を (x,y) とおくと AP=BP より

$\sqrt{(x+1)^2+(y-0)^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}$

$(x+1)^2+y^2=(x-1)^2+(y-2)^2$

$4x+4y-4=0$

$\therefore x+y-1=0$

逆にもたどれるので点 P の軌跡は

直線 $x+y-1=0$ //

(2) 2 点 A$(4,1)$, B$(0,-1)$ に対して $\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2=18$ となる

—解答例—

条件を満たす点 P の座標を (x,y) とおくと $PA^2+PB^2=18$ より

$(x-4)^2+(y-1)^2+x^2+(y+1)^2=18$　整理すると

$x^2-4x+y^2=0$

$\therefore (x-2)^2+y^2=2^2$

逆にもたどれるので

点 P の軌跡は中心 $(2,0)$，半径 2 の円である。 //

(3) 2 点 A$(-3,0)$, B$(2,0)$ からの距離の比が 2 : 3 である

—解答例—

条件を満たす点 P の座標を (x,y) とおくと AP：BP=2：3 より

$3\mathrm{AP}=2\mathrm{BP}$　　$\therefore 9\mathrm{AP}^2=4\mathrm{BP}^2$

$9\{(x+3)^2+y^2\}=4\{(x-2)^2+y^2\}$　整理して

$x^2+14x+y^2+13=0$

$\therefore (x+7)^2+y^2=36$

逆にもたどれるので

点 P の軌跡は中心 $(-7,0)$，半径 6 の円である。 //

$\boxed{2}$ 放物線 $y=x^2+2tx+t$ の頂点は t がすべての実数値をとって変わるとき、どんな曲線を描くか。

—解答例—

$y=(x+t)^2-t^2+t$

よって頂点は $(-t,-t^2+t)$

$\begin{cases} x=-t \\ y=-t^2+t \end{cases}$ とおいて t を消去すると

$y=-(-x)^2+(-x)=-x^2-x$

逆にもたどれるので

点 P の軌跡は放物線 $y=-x^2-x$ である。 //

$\boxed{3}$ 3 点 A(a,b) , B$(1,1)$, C$(4,2)$ を頂点とする △ABC において A が中心 $(1,6)$ 半径 3 の円周上を動くとき △ABC の重心の軌跡を求めよ。

—解答例—

重心を G (x,y) とおくと

$\begin{cases} x=\dfrac{a+1+4}{3} \\ y=\dfrac{b+1+2}{3} \end{cases}$　$\therefore \begin{cases} a=3x-5 \\ b=3y-3 \end{cases}$ $\cdots$

また A は中心 $(1,6)$ 半径 3 の円周上にあるので

$(a-1)^2+(b-6)^2=3^2$　ここに　を代入して

$(3x-5-1)^2+(3y-3-6)^2=3^2$

$3^2(x-2)^2+3^2(y-3)^2=3^2$　　$\therefore (x-2)^2+(y-3)^2=1$

逆にもたどれるので

△ABC の重心の軌跡は中心 $(2,3)$，半径 1 の円である。

$\boxed{4}$ 点 A$(1,3)$ と直線 $x-2y=1$ 上の点 P を結ぶ線分 AP の中点 Q の軌跡を求めよ。

—解答例—

Q(x,y), P(X,Y) とおくと

$\begin{cases} x=\dfrac{1+X}{2} \\ y=\dfrac{3+Y}{2} \end{cases}$　$\therefore \begin{cases} X=2x-1 \\ Y=2y-3 \end{cases}$ $\cdots$

また P(X,Y) は直線 $x-2y=1$ 上にあるので

$X-2Y=1$　ここに　を代入して

$(2x-1)-2(2y-3)=1$

$\therefore x-2y+2=0$

逆にもたどれるので

点 Q の軌跡は直線 $x-2y+2=0$ である。 //

$\boxed{5}$ 点 A$(4,2)$ と円 $x^2+y^2=4$ 上の点 P を結ぶ線分 AP の中点 Q の軌跡を求めよ。

—解答例—

Q(x,y), P(X,Y) とおくと

$\begin{cases} x=\dfrac{4+X}{2} \\ y=\dfrac{2+Y}{2} \end{cases}$　$\therefore \begin{cases} X=2x-4 \\ Y=2y-2 \end{cases}$ $\cdots$

また P(X,Y) は直線 $x^2+y^2=4$ 上にあるので

$X^2+Y^2=4$　ここに　を代入して

$(2x-4)^2+(2y-2)^2=4$

$\therefore (x-2)^2+(y-1)^2=1$

逆にもたどれるので

点 Q の軌跡は中心 $(2,1)$，半径 1 の円である。 //

$\boxed{6}$ 点 $A(2,-2)$ と放物線 $y=x^2$ 上の点 P を結ぶ線分 AP を 1 : 2 の比に内分する点 Q の軌跡を求めよ。

—解答例—

Q(x,y), P(X,Y) とおくと

$\begin{cases} x=\dfrac{2\cdot 2+1\cdot X}{1+2} \\ y=\dfrac{2(-2)+1\cdot Y}{1+2} \end{cases}$　$\therefore \begin{cases} X=3x-4 \\ Y=3y+4 \end{cases}$ $\cdots$

また P(X,Y) は放物線 $y=x^2$ 上にあるので

$Y=X^2$　ここに　を代入して

$3y+4=(3x-4)^2$

$\therefore y=3x^2-8x+4$

逆にもたどれるので

点 Q の軌跡は放物線 $y=3x^2-8x+4$ である。 //

$\boxed{7}$ 点 $(2,-1)$ に関して放物線 $y=x^2-2x+2$ と対称な放物線を求めよ。

—解答例—

放物線上の点 P(X,Y) の点 $(2,-1)$ に関する対称な点を Q(x,y) とおくと

$\begin{cases} \dfrac{x+X}{2}=2 \\ \dfrac{y+Y}{2}=-1 \end{cases}$　$\therefore \begin{cases} X=4-x \\ Y=-2-y \end{cases}$ $\cdots$

また P(X,Y) は放物線 $y=x^2-2x+2$ 上にあるので

$Y=X^2-2X+2$　ここに　を代入して

$-2-y=(4-x)^2-2(4-x)+2$

$\therefore y=-x^2+6x-12$

逆にもたどれるので

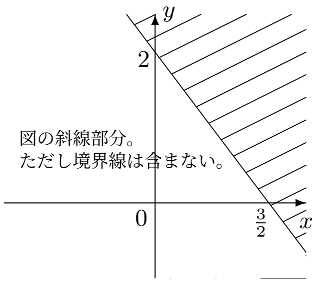
点 Q の軌跡は放物線 $y=-x^2+6x-12$ である。 //

図形と式演習　No8　不等式の表す領域

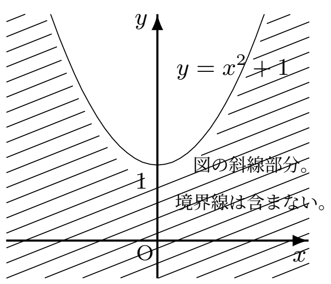
____組____番　氏名________________

$\boxed{1}$ 次の不等式の表す領域を図示せよ。

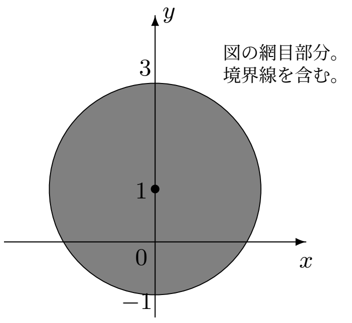
(1) $4x + 3y > 6$



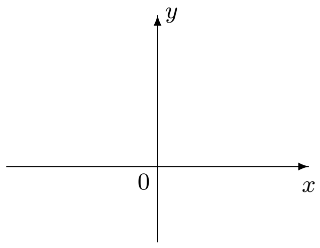
(2) $y < x^2 + 1$



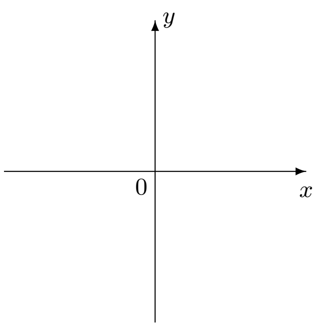
(3) $x^2 + y^2 - 2y \leqq 3$



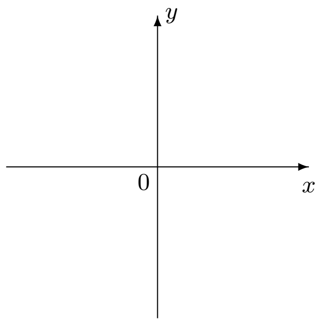
(4) $y > \sqrt{x+1}$



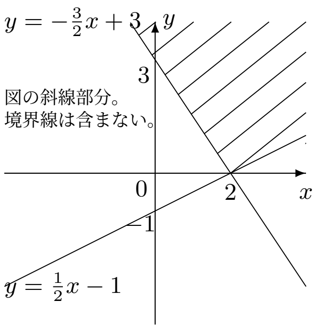
(5) $y \leqq \dfrac{2}{x}$



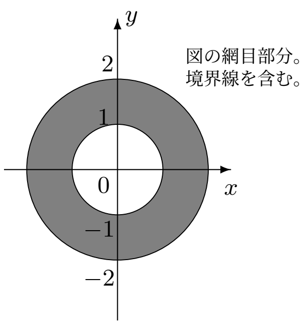
(6) $xy \leqq 2$



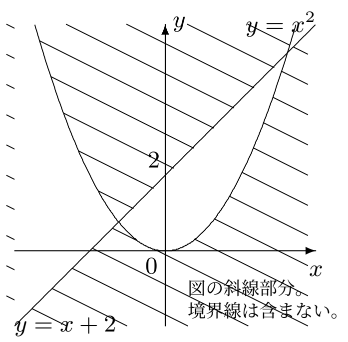
(7) $\begin{cases} x - 2y & < 2 \\ 3x + 2y & > 6 \end{cases}$



(8) $1 \leqq x^2 + y^2 \leqq 4$



(9) $(x - y + 2)(y - x^2) < 0$



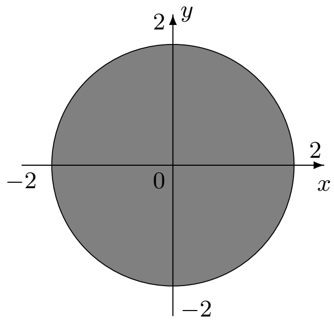
—解答例—

$$\begin{cases} x - y + 2 > 0 \\ y - x^2 < 0 \end{cases} \text{ または } \begin{cases} x - y + 2 < 0 \\ y - x^2 > 0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} y < x + 2 \\ y < x^2 \end{cases} \text{ または } \begin{cases} y > x + 2 \\ y > x^2 \end{cases}$$

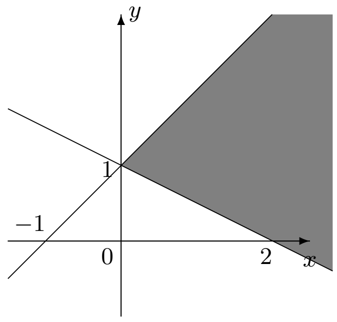
$\boxed{2}$ 図の網目部分の領域を表す不等式を求めよ。

(1) 境界を含む



$\boxed{x^2 + y^2 \leqq 4}$

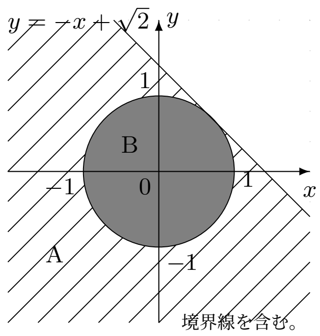
(2) 境界を含まない



$\boxed{-\dfrac{1}{2}x + 1 < y < x + 1}$

$\boxed{3}$ 条件 a を満たす集合を A, 条件 b を満たす集合を B とするとき A$\subseteqq$B ならば a は b であるための $\boxed{\text{十分条件}}$ である。

$\boxed{4}$ $x + y \leqq \sqrt{2}$ であることは $x^2 + y^2 \leqq 1$ であるための何条件か。



—解答例—

原点から直線 $x + y - \sqrt{2} = 0$ への距離は

$\dfrac{|-\sqrt{2}|}{\sqrt{2}} = 1$ より

$y = -x + \sqrt{2}$ は円に接する.

$x + y \leqq \sqrt{2}$, $x^2 + y^2 \leqq 1$ の表す領域を

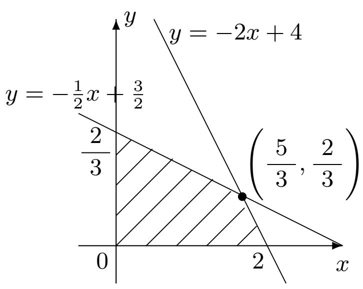
それぞれ A，B とすれば、

B $\subseteqq$ A より

$\therefore$ 必要条件. //

$\boxed{5}$ 次の問に答えよ。

(1) $2x + y \leqq 4$, $x + 2y \leqq 3$, $x \geqq 0$, $y \geqq 0$ で表される領域を図示せよ。



図の斜線部分。
ただし境界線を含む。

(2) (x, y) が (1) の領域内の点をとるとき $x + 3y$ の最大値、最小値を求めよ。

—解答例—

$x + 3y = k$ とおく。

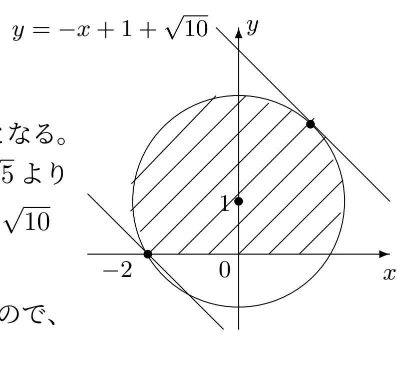
$y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{k}{3}$

点 $(0, 0)$ を通るとき最小 $\therefore 0 + 0 = 0$

点 $\left(0, \dfrac{3}{2}\right)$ を通るとき最大 $\therefore 0 + 3 \times \dfrac{3}{2} = \dfrac{9}{2}$

$$\therefore \begin{cases} \text{最大値} \dfrac{9}{2} \ \left(x = 0,\ y = \dfrac{3}{2}\right) \\ \text{最小値} \ 0 \ (x = 0,\ y = 0) \end{cases}$$

$\boxed{6}$ $x^2 + y^2 - 2y \leqq 4$, $y \geqq 0$ のとき $y + x$ の最大値、最小値を求めよ。



—解答例—

$x + y = k$ とおいて直線 $y = -x + k$ が

$x > 0, y > 0$ が円にで接するときが最大となる。

点 $(-, 1)$ と直線 $x + y - k = 0$ の距離が $\sqrt{5}$ より

$\dfrac{|1 - k|}{\sqrt{2}} = \sqrt{5}$ これを解くと $\therefore k = 1 \pm \sqrt{10}$

$x > 0, y > 0$ では $k = 1 + \sqrt{10}$.

また、最小値は $x = -2, y = 0$ のときなので、

よって最大値は $1 + \sqrt{10}$, 最小値 -2 //

三角関数演習　No1　一般角と三角関数の値

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1 360° より小さい正の角がある。この角を 7 倍して得られる角の動径は、その角の動径と一致する。その角を求めよ。

―解答例―

求める角を θ とおくと

$7\theta = \theta + 360^\circ \times n$ (n：整数)

$6\theta = 360^\circ \times n$

$\theta = 60^\circ \times n$

$0^\circ < \theta < 360^\circ$ より

$\therefore \theta = 60^\circ, 120^\circ, 180^\circ, 240^\circ, 300^\circ$ //

2 次の三角関数の値を求めよ。

(1) $\sin 210^\circ = \boxed{-\frac{1}{2}}$　　(2) $\cos 120^\circ = \boxed{-\frac{1}{2}}$

(3) $\tan 225^\circ = \boxed{1}$　　(4) $\cos 600^\circ = \boxed{-\frac{1}{2}}$

(5) $\sin 300^\circ = \boxed{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$　　(6) $\cos 315^\circ = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}}$

(7) $\tan 150^\circ = \boxed{-\frac{1}{\sqrt{3}}}$　　(8) $\sin 855^\circ = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}}$

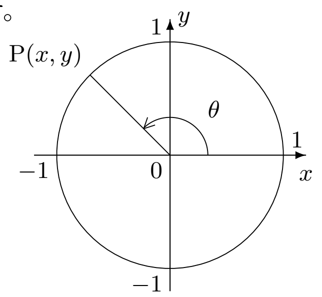
(9) $\cos 180^\circ = \boxed{-1}$　　(10) $\sin 270^\circ = \boxed{-1}$

(11) $\tan(-60^\circ) = \boxed{-\sqrt{3}}$　　(12) $\cos(-390^\circ) = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

3 $P(x, y)$ の座標を θ を用いて表せ。

$x = \boxed{\cos\theta}$

$y = \boxed{\sin\theta}$



4 次の式を簡単にせよ。

(1) $\sin(180^\circ - \theta) = \boxed{\sin\theta}$

(2) $\cos(180^\circ + \theta) = \boxed{-\cos\theta}$

(3) $\tan(180^\circ - \theta) = \boxed{-\tan\theta}$　　(4) $\sin(90^\circ + \theta) = \boxed{\cos\theta}$

(5) $\tan(90^\circ - \theta) = \boxed{\frac{1}{\tan\theta}}$　　(6) $\cos(-\theta) = \boxed{\cos\theta}$

5 θ が第 3 象限の角で、$\tan\theta = \frac{4}{3}$ のとき、$\cos\theta$, $\sin\theta$ を求めよ。

―解答例―

$1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$ より $1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2\theta}$

$\cos^2\theta = \frac{9}{25}$, θ が第 3 象限の角より $\cos\theta < 0$

$\therefore \cos\theta = -\frac{3}{5}$ //

$\sin\theta = \tan\theta \times \cos\theta = \frac{4}{3} \times \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{4}{5}$ //

6 $\cos\theta = \frac{12}{13}$ のとき、$\sin\theta, \tan\theta$ の値を求めよ。

―解答例―

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より $\sin^2\theta + \left(\frac{12}{13}\right)^2 = 1$

$\sin^2\theta = \frac{25}{169}$　　$\therefore \sin\theta = \pm\frac{5}{13}$

ここで $\cos\theta > 0$ より θ は第 1 象限か第 4 象限の角

θ は第 1 象限の角のとき，$\sin\theta = \frac{5}{13}$, $\tan\theta = \frac{5}{12}$

θ は第 4 象限の角のとき，$\sin\theta = -\frac{5}{13}$, $\tan\theta = -\frac{5}{12}$ //

7 $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}$ のとき、次の値を求めよ。

(1) $\sin\theta\cos\theta$　　(2) $\sin^3\theta + \cos^3\theta$

―解答例―

$(\sin\theta + \cos\theta)^2 = (\sqrt{2})^2$

$1 + 2\sin\theta\cos\theta = 2$

$\therefore \sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}$ //

―解答例―

$\sin^3\theta + \cos^3\theta$

$= (\sin\theta + \cos\theta)(\sin^2\theta - \sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta)$

$= \sqrt{2}(1 - \frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ //

(3) $\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta}$

―解答例―

$$\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$
$$= \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$ //

8 次の等式を証明せよ。

(1) $\cos^4\theta - \sin^4\theta = 2\cos^2\theta - 1$

―解答例―

（左辺）$= \cos^4\theta - \sin^4\theta$

$= (\cos^2\theta + \sin^2\theta)(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$

$= \cos^2\theta - \sin^2\theta$

$= \cos^2\theta - (1 - \cos^2\theta)$

$= 2\cos^2\theta - 1 =$（右辺） //

(2) $\frac{\cos\theta}{1 - \sin\theta} - \frac{\cos\theta}{1 + \sin\theta} = 2\tan\theta$

―解答例―

（左辺）$= \frac{\cos\theta}{1 - \sin\theta} - \frac{\cos\theta}{1 + \sin\theta}$

$= \frac{\cos\theta(1 + \sin\theta)}{(1 - \sin\theta)(1 + \sin\theta)} - \frac{\cos\theta(1 - \sin\theta)}{(1 + \sin\theta)(1 - \sin\theta)}$

$= \frac{\cos\theta(1 + \sin\theta) - \cos\theta(1 - \sin\theta)}{1 - \sin^2\theta}$

$= \frac{2\cos\theta\sin\theta}{\cos^2\theta}$

$= \frac{2\sin\theta}{\cos\theta}$

$= 2\tan\theta =$（右辺） //

(3) $\frac{\cos\theta}{1 + \sin\theta} + \frac{1 + \sin\theta}{\cos\theta} = \frac{2}{\cos\theta}$

―解答例―

（左辺）$= \frac{\cos\theta}{1 + \sin\theta} + \frac{1 + \sin\theta}{\cos\theta}$

$= \frac{\cos^2\theta}{(1 + \sin\theta)\cos\theta} + \frac{(1 + \sin\theta)^2}{\cos\theta(1 + \sin\theta)}$

$= \frac{\cos^2\theta + 1 + 2\sin\theta + \sin^2\theta}{(1 + \sin\theta)\cos\theta}$

$= \frac{2 + 2\sin\theta}{(1 + \sin\theta)\cos\theta}$

$= \frac{2(1 + \sin\theta)}{(1 + \sin\theta)\cos\theta}$

$= \frac{2}{\cos\theta} =$（右辺） //

(4) △ABCにおいて、$\cos\frac{A + B}{2} = \sin\frac{C}{2}$

―解答例―

$A + B + C = 180^\circ$ より

$A + B = 180^\circ - C$　　$\therefore \frac{A + B}{2} = 90^\circ - \frac{C}{2}$

$\therefore \cos\frac{A + B}{2} = \cos\left(90^\circ - \frac{C}{2}\right) = \sin\frac{C}{2}$ //

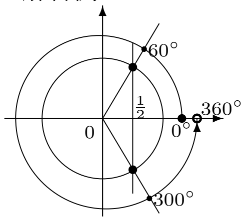
三角関数演習　No2　方程式と不等式

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ $0° \leqq x < 360°$ のとき、次の方程式を解け。また、一般解を求めよ。

(1) $\cos x = \dfrac{1}{2}$

—解答例—

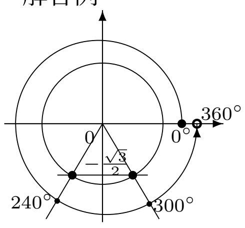


図より，$x = 60°,\ 300°$ //

一般解は $x = \pm 60° + 360° \times n$ (n : 整数)

(2) $\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

—解答例—

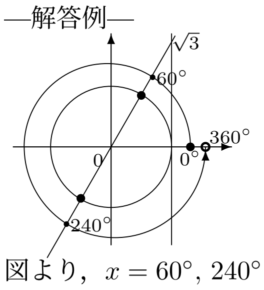


図より，$x = 240°,\ 300°$ //

一般解は $x = 240° + 360° \times n, 300° + 360° \times n$ (n : 整数)

(3) $\tan x = \sqrt{3}$

—解答例—

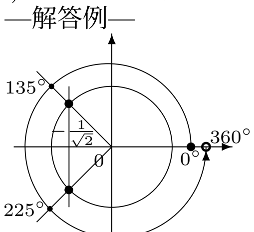


図より，$x = 60°,\ 240°$ //

一般解は $x = 60° + 180° \times n$ (n : 整数)

(4) $2\cos x = -\sqrt{2}$

—解答例—



$\cos x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

図より，$x = 135°,\ 225°$ //

一般解は $x = \pm 135° + 360° \times n$ (n : 整数)

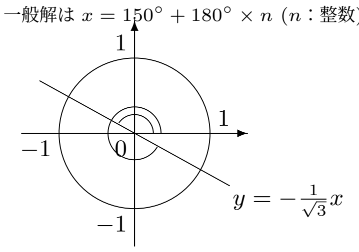
(5) $\sqrt{3}\tan x = -1$

—解答例—

$\tan x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

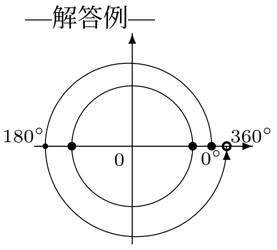
$x = 150°,\ 330°$ //

一般解は $x = 150° + 180° \times n$ (n : 整数)



(6) $\sin x = 0$

—解答例—



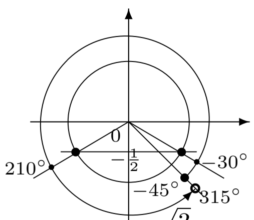
図より，$x = 0°,\ 180°$ //

一般解は $x = 0° + 180° \times n$ (n : 整数)

$\boxed{2}$ $0° \leqq x < 360°$ のとき、次の方程式を解け。また、一般解を求めよ。

(1) $\sin(x - 45°) = -\dfrac{1}{2}$

—解答例—



$-45° \leqq x - 45° < 315°$ に注意して，図より，

$x - 45° = -30°, 210°$

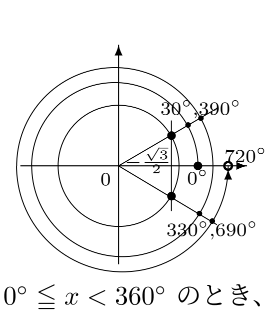
よって，$x = 15°, 255°$ //

一般解は

$x = 15° + 360° \times n, 255° + 360° \times n$ (n : 整数) //

(2) $\cos 2x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

—解答例—



$0° \leqq 2x < 2 \times 360°$ に注意して，

図より，$2x = 30°, 330°, 30°+360°, 330°+360°$

よって，$x = 15°, 165°, 195°, 345°$ //

一般解は

$x = \pm 15° + 180° \times n$ (n : 整数) //

$\boxed{3}$ $0° \leqq x < 360°$ のとき、次の方程式を解け。また、一般解を求めよ。

(1) $2\sin^2 x - \cos x - 1 = 0$

—解答例—

$2(1 - \cos^2 x) - \cos x - 1 = 0$

$2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$

$(2\cos x - 1)(\cos x + 1) = 0$

$\cos x = \dfrac{1}{2},\ -1$

$0° \leqq x < 360°$ より $\therefore x = 60°,\ 180°,\ 300°$ //

一般解は $x = \pm 60° + 360° \times n,\ 180° + 360° \times n$ (n : 整数) //

(2) $2\cos^2 x + \sin x - 1 = 0$

—解答例—

$2(1 - \sin^2 x) + \sin x - 1 = 0$

$2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

$(2\sin x + 1)(\sin x - 1) = 0$ 　　$\therefore \sin x = -\dfrac{1}{2},\ 1$

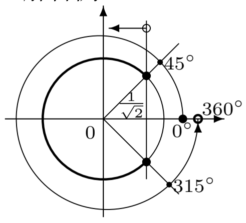
$0° \leqq x < 360°$ より $\therefore x = 90°,\ 210°,\ 330°$ //

一般解は $x = 90° + 120° \times n$ (n : 整数) //

$\boxed{4}$ $0° \leqq x < 360°$ のとき、次の不等式を解け。

(1) $\cos x < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

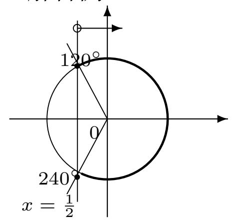
—解答例—



図より，$45° < x < 315°$ //

(2) $\cos x \geqq -\dfrac{1}{2}$

—解答例—

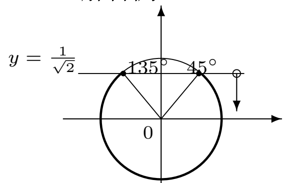


図より，$0° \leqq x \leqq 120°$,

$240° \leqq x < 360°$ //

(3) $\sin x \leqq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

—解答例—

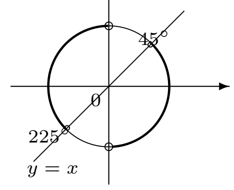


図より，$0° \leqq x \leqq 45°$,

$135° \leqq x < 360°$ //

(4) $\tan x < 1$

—解答例—

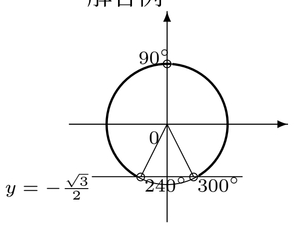


図より，$0° \leqq x < 45°$,

$90° < x < 225°,\ 270° < x < 360°$ //

(5) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2} < \sin x < 1$

—解答例—



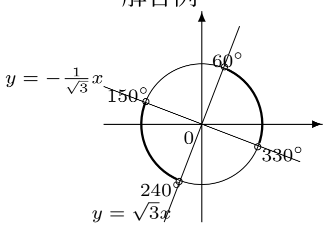
図より，$0° \leqq x < 90°$,

$90° < x < 240°$,

$300° < x < 360°$ //

(6) $-\dfrac{\sqrt{3}}{3} < \tan x < \sqrt{3}$

—解答例—



図より，$0° \leqq x < 60°$,

$150° < x < 240°$,

$330° < x < 360°$ //

$\boxed{5}$ $0° \leqq x < 360°$ のとき、次の不等式を解け。

(1) $2\cos^2 x + 3\sin x \leqq 0$

—解答例—

$2(1 - \sin^2 x) + 3\sin x \leqq 0$

$2\sin^2 x - 3\sin x - 2 \geqq 0$

$(2\sin x + 1)(\sin x - 2) \geqq 0$

$\sin x \leqq -\dfrac{1}{2},\ 2 \leqq \sin x$

$-1 \leqq \sin x \leqq 1$ より $\therefore \sin x \leqq -\dfrac{1}{2}$

$\therefore 210° \leqq x \leqq 330°$ //

(2) $2\sin^2 x - \cos x - 1 \leqq 0$

—解答例—

$2(1 - \cos^2 x) - \cos x - 1 \leqq 0$

$2\cos^2 x + \cos x - 1 \geqq 0$

$(2\cos x - 1)(\cos x + 1) \geqq 0$

$\cos x \leqq -1,\ \dfrac{1}{2} \leqq \cos x$

$-1 \leqq \cos x \leqq 1$ より $\therefore \dfrac{1}{2} \leqq \cos x,\ \cos x = -1$

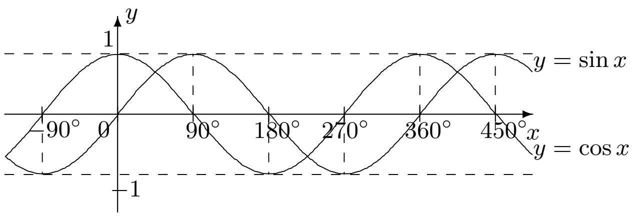
$\therefore 0° \leqq x \leqq 60°,\ x = 180°,\ 300° \leqq x < 360°$ //

三角関数演習　No3　三角関数のグラフ

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿

1 次の問に答えよ。

(1) $y=\sin x$, $y=\cos x$ のグラフを描け。

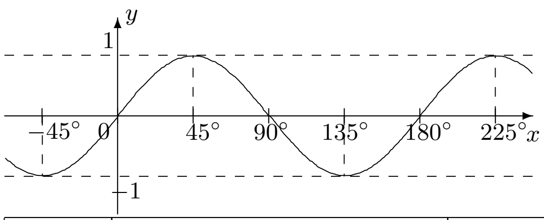


(2) 周期はともに $\boxed{360^\circ}$ で、最大値、最小値およびそのときの x の値をまとめると

	最大値		最小値	
$\sin x$	1	$x=90^\circ+360^\circ\times n$	-1	$x=270^\circ+360^\circ\times n$
$\cos x$	1	$x=0^\circ+360^\circ\times n$	-1	$x=180^\circ+360^\circ\times n$

2 $y=\sin x$, $y=\cos x$ のグラフをもとにして次の関数のグラフを描き、周期、最大値、最小値および、そのときの x の値を求めよ。

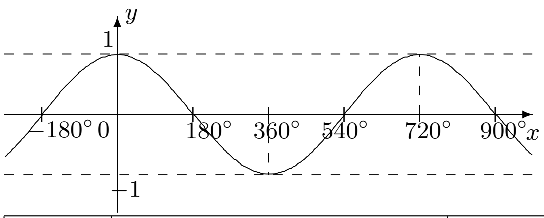
(1) $y=\sin 2x$



周期	最大値		最小値	
180°	1	$x=45^\circ+180^\circ\times n$	-1	$x=135^\circ+180^\circ\times n$

(n：整数)　(n：整数)

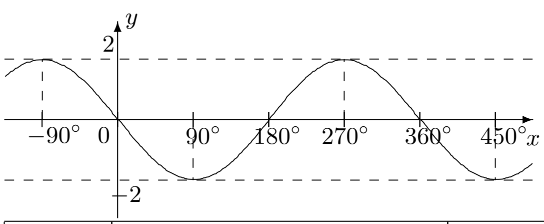
(2) $y=\cos\dfrac{x}{2}$



周期	最大値		最小値	
720°	1	$x=0^\circ+720^\circ\times n$	-1	$x=360^\circ+720^\circ\times n$

(n：整数)　(n：整数)

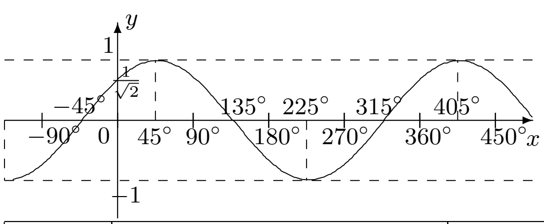
(3) $y=-2\sin x$



周期	最大値		最小値	
360°	2	$x=270^\circ+360^\circ\times n$	-2	$x=90^\circ+360^\circ\times n$

(n：整数)　(n：整数)

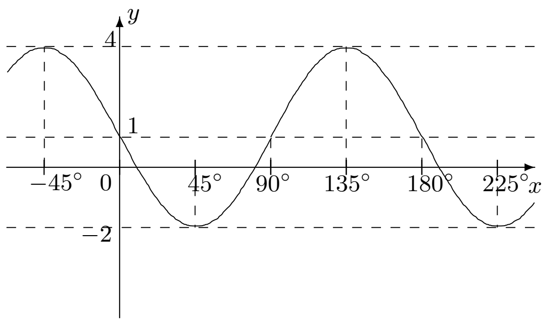
(4) $y=\cos(x-45^\circ)$



周期	最大値		最小値	
360°	1	$x=45^\circ+360^\circ\times n$	-1	$x=225^\circ+360^\circ\times n$

(n：整数)　(n：整数)

3 $y=3\sin(2x-180^\circ)+1$ のグラフは $y=\boxed{3\sin 2(x-90^\circ)+1}$ と変形することで、$y=\sin x$ のグラフを x 軸方向に $\boxed{\dfrac{1}{2}}$ 倍し、その後 $\boxed{90^\circ}$ だけ x 軸方向に平行移動する。さらに y 軸方向に $\boxed{3}$ 倍して、最後に y 軸方向に $\boxed{1}$ だけ平行移動したグラフであることがわかる。グラフは



4 $0^\circ\leqq x<360^\circ$ のとき、次の関数の最大値、最小値、およびそのときの x の値を求めよ。

(1) $y=2\sin x-1$

—解答例—

$-1\leqq\sin x\leqq 1$ より $-2\leqq 2\sin x\leqq 2$　　$\therefore -3\leqq 2\sin x-1\leqq 1$

$2\sin x-1=1$ となるのは,$\sin x=1$ つまり $x=90^\circ$ のとき

$2\sin x-1=-3$ となるのは,$\sin x=-1$ つまり $x=270^\circ$ のとき

よって、最大値 1 $(x=90^\circ)$, 最小値 $-3(x=270^\circ)$ //

(2) $y=\sin^2 x-\cos x+2$

—解答例—

$y=\sin^2 x-\cos x+2=1-\cos^2 x-\cos x+2=-\cos^2 x-\cos x+3$

$\cos x=t$ とおくと,

$y=-t^2-t+3=-\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{13}{4}$

$-1\leqq\cos x\leqq 1$ より $-1\leqq t\leqq 1$

$t=-\dfrac{1}{2}$ のとき最大値 $\dfrac{13}{4}$, $t=1$ のとき最小値 1　をとる。

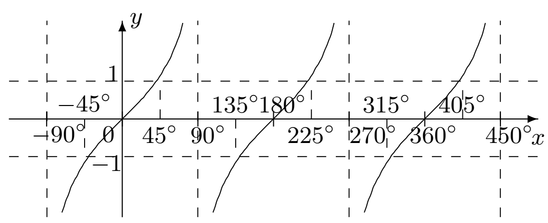
$t=-\dfrac{1}{2}$ のとき, つまり $\cos x=-\dfrac{1}{2}$ $\therefore x=120^\circ,\ 240^\circ$

$t=1$ のとき, つまり $\cos x=1$ $\therefore x=0^\circ$

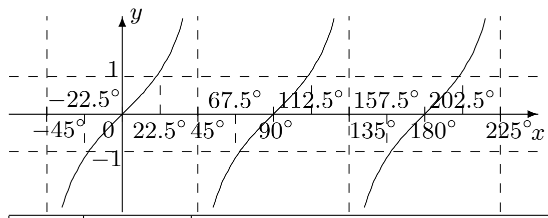
$\therefore x=120^\circ,\ 240^\circ$ のとき最大値 $\dfrac{13}{4}$, $x=0^\circ$ のとき最小値 1 //

5 次の関数のグラフを描き、周期、漸近線を求めよ。

(1) $y=\tan x$



(2) $y=\tan 2x$



	周期	漸近線
(1)	180°	$x=90^\circ+180^\circ\times n$($n$：整数)
(2)	90°	$x=45^\circ+90^\circ\times n$($n$：整数)

三角関数演習　NO4　加法定理·2 倍角の公式

____ 組 ____ 番　氏名 ________________

$\boxed{1}$ 次の値を求めよ。

(1) $\sin 75^\circ = \boxed{\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$　　(2) $\cos 105^\circ = \boxed{\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}}$

(3) $\sin 15^\circ = \boxed{\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$　　(4) $\tan 165^\circ = \boxed{-2+\sqrt{3}}$

$\boxed{2}$ α , β がそれぞれ第 2、第 4 象限の角で $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$, $\cos\beta = \dfrac{5}{13}$ であるとき、$\sin(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha-\beta)$ を求めよ。

—解答例—

$\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha = 1-\dfrac{9}{25} = \dfrac{16}{25}$ $\therefore \cos\alpha = -\dfrac{4}{5}$($\because\alpha$:第 2 象限)

$\sin^2\beta = 1-\cos^2\beta = 1-\dfrac{25}{169} = \dfrac{144}{169}$ $\therefore \sin\beta = -\dfrac{12}{13}$($\because\beta$:第 4 象限)

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$= \dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{5}{13} + \left(-\dfrac{4}{5}\right)\left(-\dfrac{12}{13}\right) = \dfrac{63}{65}$ //

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$= -\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{5}{13} + \dfrac{3}{5}\left(-\dfrac{12}{13}\right) = -\dfrac{56}{65}$ //

$\boxed{3}$ α , β がともに第 1 象限の角で、$\tan\alpha = \dfrac{1}{2}$, $\tan\beta = \dfrac{1}{3}$ であるとき、$\alpha+\beta$ の値を求めよ。

—解答例—

$\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} = \dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = 1$

$0^\circ < \alpha < 90^\circ,\ 0^\circ < \beta < 90^\circ$ より $0^\circ < \alpha+\beta < 180^\circ$

よって $\alpha+\beta = 45^\circ$ //

$\boxed{4}$ 直線 $y = mx+n$ が x 軸の正の方向となす角を θ とすると、

$m = \boxed{\tan\theta}$

$\boxed{5}$ 2 直線 $x+3y+2=0$, $x-2y=0$ のなす角を求めよ。

—解答例—

2 直線 $x+3y+2=0$, $x-2y=0$ の x 軸の正の向きとのなす角をそれぞれ $\theta_1,\ \theta_2$ とすると

$x+3y+2=0 \iff y = -\dfrac{1}{3}x-\dfrac{2}{3}$ より $\tan\theta_1 = -\dfrac{1}{3}$

$x-2y=0 \iff y = \dfrac{1}{2}x$ より $\tan\theta_2 = \dfrac{1}{2}$

$\tan(\theta_1-\theta_2) = \dfrac{\tan\theta_1-\tan\theta_2}{1+\tan\theta_1\tan\theta_2} = \dfrac{-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}{1+(-\frac{1}{3})\cdot\frac{1}{2}} = -1$

$\therefore \theta_1-\theta_2 = 135^\circ$ $\therefore 180^\circ-135^\circ = 45^\circ$

よってなす角は 45° //

$\boxed{6}$ $\sin\theta = \dfrac{5}{13}$ $(90^\circ < \theta < 180^\circ)$ のとき、$\cos 2\theta$, $\sin 2\theta$ の値を求めよ。

—解答例—

$\cos^2\theta = 1-\sin^2\theta = \dfrac{144}{169}$ $\therefore \cos\theta = \pm\dfrac{12}{13}$

$90^\circ < \theta < 180^\circ$ より $\cos\theta < 0$　　$\therefore \cos\theta = -\dfrac{12}{13}$

$\cos 2\theta = 1-2\sin^2\theta = 1-2\left(\dfrac{5}{13}\right)^2 = \dfrac{119}{169}$ //

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\cdot\dfrac{5}{13}\cdot\left(-\dfrac{12}{13}\right)^2 = -\dfrac{120}{169}$ //

$\boxed{7}$ $\sin\theta+\cos\theta = \dfrac{1}{3}$ のとき、$\sin 2\theta$ の値を求めよ。

—解答例—

$(\sin\theta+\cos\theta)^2 = \left(\dfrac{1}{3}\right)^2$

$\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = \dfrac{1}{9}$

$1+\sin 2\theta = \dfrac{1}{9}$　　$\therefore \sin 2\theta = -\dfrac{8}{9}$ //

$\boxed{8}$ 次の方程式を解け。ただし、$0^\circ \leqq x < 360^\circ$ とする。

(1) $\sin 2x = \cos x$

—解答例—

$2\sin x\cos x = \cos x$

$\cos x(2\sin x-1) = 0$

$\begin{cases} \cos x = 0 & \therefore x = 90^\circ, 270^\circ \\ \sin x = \dfrac{1}{2} & \therefore x = 30^\circ, 150^\circ \end{cases}$

$\therefore x = 30^\circ,\ 90^\circ,\ 150^\circ,\ 270^\circ$ //

(2) $\cos 2x - 5\cos x - 2 = 0$

—解答例—

$2\cos^2 x - 1 - 5\cos x - 2 = 0$

$2\cos^2 x - 5\cos x - 3 = 0$

$(2\cos x+1)(\cos x-3) = 0$　$\therefore$

$\cos x = -\dfrac{1}{2},\ 3$

$\cos x \neq 3$ より

$\therefore x = 120^\circ,\ 240^\circ$ //

$\boxed{9}$ 次の等式を証明せよ。

(1) $\cos^4 x - \sin^4 x = \cos 2x$

—解答例—

(左辺)

$= (\cos^2 x+\sin^2 x)(\cos^2 x-\sin^2 x)$

$= 1\cdot(\cos^2 x-\sin^2 x)$

$= \cos 2x$

=(右辺) //

(2) $\dfrac{\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta} = \tan\theta$

—解答例—

(左辺)$= \dfrac{2\sin\theta\cos\theta}{1+(2\cos^2\theta-1)}$

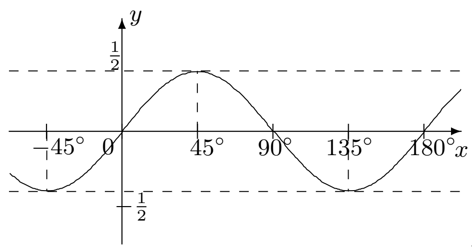
$= \dfrac{2\sin\theta\cos\theta}{2\cos^2\theta}$

$= \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$= \tan\theta$

=(右辺) //

$\boxed{10}$ $y = \sin x\cos x$ について、周期を求め、グラフをかけ。



$y = \dfrac{1}{2}(2\sin x\cos x) = \dfrac{1}{2}\sin 2x$

周期は $\boxed{180^\circ}$

$\boxed{11}$ $\tan\theta = a$ とするとき、$\sin 2\theta$, $\cos 2\theta$ を a で表せ。

—解答例—

$1+\tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ より $\cos^2\theta = \dfrac{1}{1+a^2}$

$\therefore \cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2\cdot\dfrac{1}{1+a^2} - 1 = \dfrac{1-a^2}{1+a^2}$ //

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\cdot\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\cdot\cos^2\theta = 2a\cdot\dfrac{1}{1+a^2} = \dfrac{2a}{1+a^2}$ //

$\boxed{12}$ $\sin 3\theta = \boxed{3\sin\theta - 4\sin^3\theta}$,　$\cos 3\theta = \boxed{-3\cos\theta + 4\cos^3\theta}$

$\boxed{13}$ $\cos 22.5^\circ$ の値を求めよ。

—解答例—

$\cos^2 22.5^\circ = \dfrac{1+\cos 45^\circ}{2} = \dfrac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{2} = \dfrac{2+\sqrt{2}}{4}$

$\cos 22.5^\circ > 0$ より

$\therefore \cos 22.5^\circ = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ //

三角関数演習　No5　三角関数の合成

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ 次の式を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に直せ。

(1) $\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=\boxed{2\sin(\theta+60^\circ)}$

(2) $\sin\theta-\cos\theta=\boxed{\sqrt{2}\sin(\theta-45^\circ)}$

$\boxed{2}$ $y=\sqrt{3}\sin x+\cos x$ の最大値、最小値、およびそのときの x の値を求めよ。ただし、$0^\circ \leqq x < 360^\circ$

―解答例―

$y=2\sin(x+30^\circ)$

$x+30^\circ=X$ とおくと $y=2\sin X(30^\circ \leqq X < 390^\circ)$

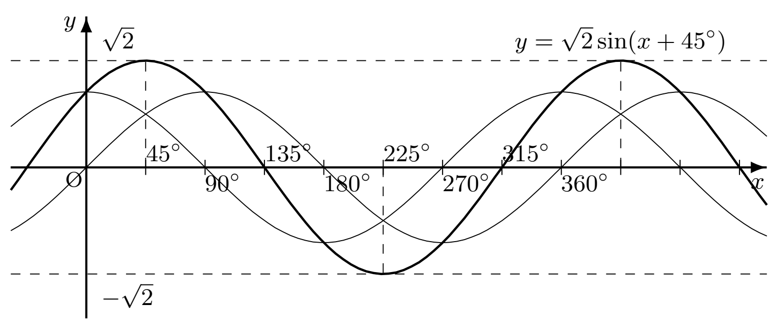
$-1\leqq \sin X\leqq 1 \quad \therefore -2\leqq 2\sin X\leqq 2$

・$\sin X=1\Rightarrow X=90^\circ \quad \therefore x+30^\circ=90^\circ \quad \therefore x=60^\circ$

・$\sin X=-1\Rightarrow X=270^\circ \quad \therefore x+30^\circ=270^\circ \quad \therefore x=240^\circ$

$\begin{cases} x=60^\circ\text{のとき最大値}\quad 2 \\ x=240^\circ\text{のとき最小値}\quad -2 \end{cases}$ //

$\boxed{3}$ $y=\sin x+\cos x$ のグラフをかけ。



$\boxed{4}$ $0^\circ\leqq x<360^\circ$ のとき、次の方程式を解け。

$$\sqrt{3}\cos x-\sin x=1$$

―解答例―

$2\sin(x-60^\circ)=-1 \quad \therefore \sin(x-60^\circ)=-\dfrac{1}{2}$

$x-60^\circ=X$ とおくと $-60^\circ\leqq x-60^\circ<300^\circ$

$\therefore \sin X=-\dfrac{1}{2}(-60^\circ\leqq X<300^\circ)$

$X=-30^\circ,\ 210^\circ \quad \therefore x-60^\circ=-30^\circ,\ 210^\circ$

$\therefore x=30^\circ,\ 270^\circ$ //

$\boxed{5}$ $y=4\sin x+3\cos x$ の最大値、最小値を求めよ。

―解答例―

$y=5\sin(x+\alpha)$ (ただし $\sin\alpha=\dfrac{3}{5},\ \cos\alpha=\dfrac{4}{5}$)

$-1\leqq\sin(x+\alpha)\leqq 1$ より

$-5\leqq 5\sin(x+\alpha)\leqq 5$

よって最大値 5, 最小値 -5 //

$\boxed{6}$ $y=\cos x+2\sin(x+30^\circ)$ の最大値、最小値を求めよ。

―解答例―

$y=\cos x+2(\sin x\cos 30^\circ+\cos x\sin 30^\circ)$

$=\cos x+\sqrt{3}\sin x+\cos x$

$=\sqrt{3}\sin x+2\cos x$

$=\sqrt{7}\sin(x+\alpha)$ (ただし $\sin\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{7}},\ \cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$)

$-1\leqq\sin(x+\alpha)\leqq 1$ より $-\sqrt{7}\leqq\sqrt{7}\sin(x+\alpha)\leqq\sqrt{7}$

よって最大値 $\sqrt{7}$, 最小値 $-\sqrt{7}$ //

$\boxed{7}$ $0^\circ\leqq\theta\leqq 90^\circ$ のとき，関数 $y=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+3\cos^2\theta$ について，次の問いに答えよ。

(1) y を $\sin 2\theta,\ \cos 2\theta$ を用いて表せ。

―解答例―

$y=\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+3\cos^2\theta$

$=\sin^2\theta+\sin 2\theta+\cos^2\theta+2\cos^2\theta$

$=1+\sin 2\theta+\cos 2\theta+1$ ($\because\ \cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$)

$=\sin 2\theta+\cos 2\theta+2$ //

(2) y の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの θ の値を求めよ。

―解答例―

$y=\sin 2\theta+\cos 2\theta+2=\sqrt{2}\sin(2\theta+45^\circ)+2$

$0^\circ\leqq\theta\leqq 90^\circ$ より $0^\circ\leqq 2\theta\leqq 180^\circ$

$\therefore 45^\circ\leqq 2\theta+45^\circ\leqq 225^\circ$

$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\leqq\sin(2\theta+45^\circ)\leqq 1$

$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}\leqq\sqrt{2}\sin(2\theta+45^\circ)\leqq\sqrt{2}$

$-1+2\leqq\sqrt{2}\sin(2\theta+45^\circ)+2\leqq\sqrt{2}+2$

$\therefore 1\leqq\sqrt{2}\sin(2\theta+45^\circ)+2\leqq\sqrt{2}+2$

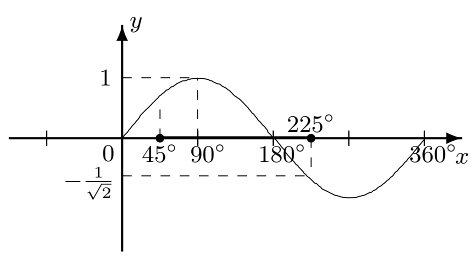
$\sin(2\theta+45^\circ)=1$ のとき，つまり $2\theta+45^\circ=90^\circ$

$\therefore\theta=22.5^\circ$ のとき最大値 $\sqrt{2}+2$

$\sin(2\theta+45^\circ)=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，つまり $2\theta+45^\circ=225^\circ$

$\therefore\theta=90^\circ$ とき最小値 1

$\begin{cases}\theta=22.5^\circ\text{のとき最大値}\sqrt{2}+2 \\ \theta=90^\circ\text{とき最小値 }1\end{cases}$ //



三角関数演習　No6　積と和の変換公式

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ 次の積は和に、和は積に変形せよ。

(1) $\sin\theta\cos 3\theta$

—解答例—

$= \dfrac{1}{2}\{\sin(\theta+3\theta)+\sin(\theta-3\theta)\}$

$= \dfrac{1}{2}\{\sin 4\theta+\sin(-2\theta)\}$

$= \dfrac{1}{2}(\sin 4\theta-\sin 2\theta)$ //

(2) $\cos 2\theta\cos 3\theta$

—解答例—

$= \dfrac{1}{2}\{\cos(2\theta+3\theta)+\cos(2\theta-3\theta)\}$

$= \dfrac{1}{2}\{\cos 5\theta+\cos(-\theta)\}$

$= \dfrac{1}{2}(\cos 5\theta+\cos\theta)$ //

(3) $\sin\theta-\sin 3\theta$

—解答例—

$= 2\cos\dfrac{\theta+3\theta}{2}\sin\dfrac{\theta-3\theta}{2}$

$= 2\cos 2\theta\sin(-\theta)$

$= -2\cos 2\theta\sin\theta$ //

(4) $\cos 2\theta-\cos 4\theta$

—解答例—

$= -2\sin\dfrac{2\theta+4\theta}{2}\sin\dfrac{2\theta-4\theta}{2}$

$= -2\sin 3\theta\sin(-\theta)$

$= 2\sin 3\theta\sin\theta$ //

$\boxed{2}$ 次の式の値を求めよ。

(1) $\cos 55^\circ+\cos 65^\circ-\cos 5^\circ$

—解答例—

$= 2\cos\frac{55^\circ+65^\circ}{2}\cos\frac{55^\circ-65^\circ}{2}-\cos 5^\circ$

$= 2\cos 120^\circ\cos(-5^\circ)-\cos 5^\circ$

$= 2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\cos 5^\circ-\cos 5^\circ$

$= 0$ //

(2) $\sin 10^\circ+\sin 50^\circ-\sin 70^\circ$

—解答例—

$= 2\sin\frac{10^\circ+50^\circ}{2}\cos\frac{10^\circ-50^\circ}{2}-\sin 70^\circ$

$= 2\sin 30^\circ\cos(-20^\circ)-\sin 70^\circ$

$= 2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\cos 20^\circ-\sin(90^\circ-20^\circ)$

$= \cos 20^\circ-\cos 20^\circ$

$= 0$ //

(3) $\dfrac{\cos 55^\circ\cos 35^\circ}{\sin 155^\circ+\sin 115^\circ}$

—解答例—

分子 $= \dfrac{1}{2}(\cos 90^\circ+\cos 20^\circ) = \dfrac{1}{2}(0+\cos 20^\circ) = \dfrac{1}{2}\cos 20^\circ$

分母 $= 2\sin\frac{155^\circ+115^\circ}{2}\cos\frac{155^\circ-115^\circ}{2} = 2\sin 135^\circ\cos 20^\circ = \sqrt{2}\cos 20^\circ$

与式 $= \dfrac{\frac{1}{2}\cos 20^\circ}{\sqrt{2}\cos 20^\circ} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$ //

$\boxed{3}$ $0^\circ \leqq x < 360^\circ$ のとき、次の方程式を解け。

$$\sin x+\sin 2x+\sin 3x = 0$$

—解答例—

与式 $= \sin x+\sin 3x+\sin 2x$

$= 2\sin\dfrac{x+3x}{2}\cos\dfrac{x-3x}{2}+\sin 2x$

$= 2\sin 2x\cos(-x)+\sin 2x$

$= \sin 2x(2\cos x+1) = 0$

・$\sin 2x = 0(0^\circ \leqq 2x < 720^\circ)\ \therefore\ 2x = 0^\circ, 180^\circ, 360^\circ, 540^\circ$

$\therefore x = 0^\circ,\ 90^\circ,\ 180^\circ,\ 270^\circ$

・$\cos x = -\dfrac{1}{2}(0^\circ \leqq x < 360^\circ)\ \therefore\ x = 120^\circ,\ 240^\circ$

$\therefore x = 0^\circ,\ 90^\circ,\ 120^\circ,\ 180^\circ,\ 240^\circ,\ 270^\circ$ //

$\boxed{4}$ $0^\circ \leqq x < 360^\circ$ のとき、次の関数の最大値、最小値を求めよ。

$$y = \sin(x+135^\circ)-\sin(x-45^\circ)$$

—解答例—

$y = 2\cos\frac{(x+135^\circ)+(x-45^\circ)}{2}\sin\frac{(x+135^\circ)(x-45^\circ)}{2} = 2\cos(x+45^\circ)\sin 90^\circ$

$\therefore y = 2\cos(x+45^\circ)$

$0^\circ \leqq x < 360^\circ$ より $45^\circ \leqq x+45^\circ < 405^\circ$

$x+45^\circ = X$ とおくと $y = \sin X(45^\circ \leqq X < 405^\circ)$

$\begin{cases} X = 360^\circ \to x = 315^\circ \text{のとき最大値} 2 \\ X = 180^\circ \to x = 135^\circ \text{のとき最小値} -2 \end{cases}$ //

$\boxed{5}$ $\mathrm{A+B+C} = 180^\circ$ のとき、次を証明せよ。

$$\sin 2\mathrm{A}+\sin 2\mathrm{B}-\sin 2\mathrm{C} = 4\cos\mathrm{A}\cos\mathrm{B}\sin\mathrm{C}$$

—解答例—

左辺 $= 2\sin\frac{2A+2B}{2}\cos\frac{2A-2B}{2}-2\sin 2C$

$= 2\sin(A+B)\cos(A-B)-\sin 2C$

$= 2\sin(180^\circ-C)\cos(A-B)-\sin 2C$

$= 2\sin C\cos(A-B)-2\sin C\cos C$

$= 2\sin C\{\cos(A-B)-\cos C\}$

$= 2\sin C(-2\sin\frac{A-B+C}{2}\sin\frac{A-B-C}{2})$

$= 2\sin C(-2\sin\frac{A+C-B}{2}\sin\frac{A-(B+C)}{2})$

$= -4\sin C\sin\frac{(180^\circ-B)-B}{2}\sin\frac{A-(180^\circ-A)}{2}$

$= -4\sin C\sin(90^\circ-B)\sin(A-90^\circ)$

$= -4\sin C\cos B(-\cos A)$

$= 4\cos A\cos B\sin C =$ 右辺 //

指数・対数演習　No1　指数の計算

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ 次の式を a^x の形で表せ。

(1) $\sqrt[3]{a^5} = \boxed{a^{\frac{5}{3}}}$　　(2) $\dfrac{1}{\sqrt{a}} = \boxed{a^{-\frac{1}{2}}}$

(3) $(a^{\frac{2}{3}} \times a^{\frac{1}{2}})^6 \div a^2$　　(4) $(a^{\frac{2}{5}})^{-\frac{5}{4}} \times a^{\frac{1}{2}} \div a^{-\frac{3}{4}}$

—解答例—

与式 $= (a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{2}})^6 \div a^2$

$= a^{4+3-2} = a^5$

—解答例—

与式 $= a^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-(-\frac{3}{4})} = a^{\frac{3}{4}}$

(5) $\sqrt{a} \div \dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$　　(6) $\sqrt[5]{a^2 \times \sqrt{a}}$

—解答例—

与式 $= a^{\frac{1}{2}} \div a^{-\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}} = a^{\frac{7}{6}}$

—解答例—

与式 $= (a^2 \times a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{5}}$

$= (a^{2+\frac{1}{2}})^{\frac{1}{5}} = a^{\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{5}} = a^{\frac{1}{2}}$

(7) $\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{a}}{a \times \sqrt[3]{a}}}$

—解答例—

与式 $= \left(\dfrac{a^{\frac{1}{2}}}{a \times a^{\frac{1}{3}}}\right)^{\frac{1}{3}} = (a^{\frac{1}{2}-1-\frac{1}{3}})^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{3-6-2}{6}\cdot\frac{1}{3}} = a^{-\frac{5}{18}}$

$\boxed{2}$ 次の式の値を求めよ。

(1) $81^{\frac{3}{4}} = \boxed{27}$　　(2) $27^{-\frac{5}{3}} = \boxed{\dfrac{1}{243}}$

(3) $(8^{-4})^{\frac{1}{6}} = \boxed{\dfrac{1}{4}}$　　(4) $100^{-1.5} = \boxed{\dfrac{1}{1000}}$

(5) $\left\{\left(\dfrac{16}{81}\right)^{\frac{3}{4}}\right\}^{-\frac{1}{3}}$　　(6) $\dfrac{1}{\sqrt[4]{2^3}} \div \sqrt[8]{64} \div \dfrac{1}{\sqrt{32}}$

—解答例—

与式 $= \left(\dfrac{2}{3}\right)^{4\cdot\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)} = \dfrac{3}{2}$

—解答例—

与式 $= 2^{-\frac{3}{4}} \div 2^{\frac{6}{8}} \div 2^{-\frac{5}{2}}$

$= 2^{-\frac{3}{4}-\frac{3}{4}+\frac{5}{2}} = 2^{-\frac{3}{2}+\frac{5}{2}} = 2$

(7) $\sqrt[3]{9} \times \dfrac{1}{\sqrt[4]{81^2}} \div \sqrt[3]{3^5}$

—解答例—

与式 $= 3^{\frac{2}{3}} \times 3^{-2} \div 3^{\frac{5}{3}} = 3^{\frac{2}{3}-2-\frac{5}{3}} = 3^{-3} = \dfrac{1}{27}$

$\boxed{3}$ 次の式を簡単にせよ。

(1) $a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{4}} \times (a^{\frac{3}{2}}b^{-2})^{\frac{1}{3}}$　　(2) $(a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}})^2$

—解答例—

与式 $= a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{4}} \times a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{2}{3}}$

$= a^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{4}-\frac{2}{3}} = b^{\frac{1}{12}}$

—解答例—

与式 $= a^1 + 2a^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{2}} + a^{-1}$

$= a + 2 + \dfrac{1}{a}$

(3) $(a^{\frac{1}{4}} - 1)(a^{\frac{1}{4}} + 1)(a^{\frac{1}{2}} + 1)$　　(4) $(a^{\frac{1}{3}} + a^{-\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}} - 1 + a^{-\frac{2}{3}})$

—解答例—

与式 $= (a^{\frac{1}{2}} - 1)(a^{\frac{1}{2}} + 1) = a - 1$

—解答例—

与式 $= \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3 + \left(a^{-\frac{1}{3}}\right)^3$

$= a + \dfrac{1}{a}$

$\boxed{4}$ $a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}} = 3$ のとき $a + a^{-1}$, $a^2 + a^{-2}$ の値を求めよ。

—解答例—

$\left(a^{\frac{1}{2}+a^{-\frac{1}{2}}}\right)^2 = 3^2$

$\therefore a + 2 + a^{-1} = 9$

$\therefore a + a^{-1} = 7$

$(a + a^{-1})^2 = 7^2 = 49$

$\therefore a^2 + 2 + a^{-2} = 49$

$\therefore a + a^{-2} = 47$

$\boxed{5}$ $2^x = 5$ のとき $\dfrac{8^x + 8^{-x}}{2^x + 2^{-x}}$ の値を求めよ。

—解答例—

$\dfrac{8^x + 8^{-x}}{2^x + 2^{-x}} = \dfrac{(2^x)^3 + (2^{-x})^3}{2^x + 2^{-x}} = (2^x)^2 - 2^x \cdot 2^{-x} + (2^{-x})^2$

$= 5^2 - 1 + 5^{-2} = 24 + \dfrac{1}{25} = \dfrac{601}{25}$

$\boxed{6}$ 次の方程式を解け。

(1) $4^x = 32$　　(2) $\left(\dfrac{1}{27}\right)^x = 9$

—解答例—

$2^{2x} = 2^5$

$\therefore 2x = 5$

$\therefore x = \dfrac{5}{2}$

—解答例—

$(3^{-3})^x = 3^2$

$\therefore 3^{-3x} = 3^2$

$\therefore -3x = 2$

$\therefore x = -\dfrac{2}{3}$

(3) $5^{2x} - 3 \cdot 5^x - 10 = 0$　　(4) $9^x - 2 \cdot 3^{x+1} - 27 = 0$

—解答例—

$(5^x)^2 - 3 \cdot 5^x - 10 = 0$

$\therefore (5^x + 2)(5^x - 5) = 0$

$\therefore 5^x = 5 \quad (\because 5^x + 2 \neq 0)$

$\therefore x = 1$

—解答例—

$(3^x)^2 - 6 \cdot 3^x - 27 = 0$

$\therefore (3^x + 3)(3^x - 9) = 0$

$\therefore 3^x = 3^2 \quad (\because 3^x + 3 \neq 0)$

$\therefore x = 2$

(5) $4^{x-1} - 5 \cdot 2^{x-2} + 1 = 0$

—解答例—

$\dfrac{1}{4}2^{2x} - \dfrac{5}{4} \cdot 2^x + 1 = 0$

$\therefore (2^x)^2 - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$

$\therefore (2^x - 1)(2^x - 4) = 0$

$\therefore 2^x = 1, 2^2$

$\therefore x = 0, 2$

指数・対数演習　No2　指数関数のグラフと不等式

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

数の大小比較

(1) それぞれの数を a^x の形でかき、底をそろえて指数を比較する

(2) 底がそろわないときは、それぞれの数を何乗かして $\sqrt{\ }$ をはずす

$\boxed{1}$ 次の各組の数の大小を比較せよ。

(1) $\sqrt[5]{8}$, $\sqrt[3]{4}$

—解答例—

$\sqrt[5]{8} = 2^{\frac{3}{5}}$

$\sqrt[3]{4} = 2^{\frac{2}{3}}$

$\dfrac{3}{5} < \dfrac{2}{3}$ ゆえ

$\sqrt[5]{8} < \sqrt[3]{4}$

(2) $\sqrt[3]{9}$, $\sqrt[5]{27}$, $\sqrt[7]{81}$

—解答例—

$\sqrt[3]{9} = 3^{\frac{2}{3}}$

$\sqrt[5]{27} = 3^{\frac{3}{5}}$

$\sqrt[7]{81} = 3^{\frac{4}{7}}$

$\dfrac{4}{7} < \dfrac{3}{5} < \dfrac{2}{3}$ ゆえ

$\sqrt[7]{81} < \sqrt[5]{27} < \sqrt[3]{9}$

(3) $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{5}$

—解答例—

$(\sqrt[3]{3})^{12} = 3^4 = 81$

$(\sqrt[4]{5})^{12} = 5^3 = 125$

$81 < 125$ ゆえ

$\sqrt[3]{3} < \sqrt[4]{5}$

(4) $\sqrt{2}$, $\sqrt[4]{5}$, $\sqrt[6]{11}$

—解答例—

$(\sqrt{2})^6 = 2^3 = 8 < 11 = (\sqrt[6]{11})^6$

$(\sqrt[6]{11})^{12} = 11^2 = 121$

$(\sqrt[4]{5})^{12} = 5^3 = 125$

$\therefore \sqrt{2} < \sqrt[6]{11} < \sqrt[4]{5}$

(5) $0.5^{\frac{1}{2}}$, 1 , $2^{-\frac{1}{3}}$, $4^{-\frac{1}{5}}$

—解答例—

$0.5^{\frac{1}{2}} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{-\frac{1}{2}}$

$4^{-\frac{1}{5}} = 2^{-\frac{2}{5}}$

$-\dfrac{1}{2} < -\dfrac{2}{5} < -\dfrac{1}{3} < 0$ ゆえ

$0.5^{\frac{1}{2}} < 4^{-\frac{1}{5}} < 2^{-\frac{1}{3}} < 1$

$\boxed{2}$ 次の関数のグラフは、$y = 3^x$ のグラフをどのように移動したものか。

(1) $y = -3^x$　$\boxed{x \text{ 軸に関して対称移動}}$

(2) $y = 3^{-x}$　$\boxed{y \text{ 軸に関して対称移動}}$

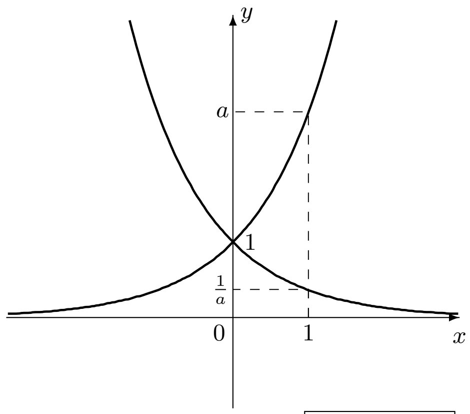
(3) $y = 3^{x-2}$　$\boxed{x \text{ 軸方向に 2、平行移動}}$

(4) $y = 3^x - 2$　$\boxed{y \text{ 軸方向に } -2\text{, 平行移動}}$

(5) $y = -3^{-x}$　$\boxed{\text{原点に関して対称移動}}$

(6) $y = 9 \cdot 3^x$　$\boxed{x \text{ 軸方向に } -2\text{, 平行移動}}$

$\boxed{3}$ $y = a^x$ $(a > 0$, $a \neq 1)$ のグラフの概形を $0 < a < 1$ と $1 < a$ の 2 つの場合に分けて、1 つの座標平面上にかけ。



2 つのグラフは、ともに点 $\boxed{(0,1)}$ を通り、漸近線は $\boxed{y = 0}$ である。

$\boxed{4}$ 次の不等式を解け。

(1) $4^x \geqq 32$

—解答例—

$2^{2x} \geqq 2^5$

$\therefore 2x \geqq 5$

$\therefore x \geqq \dfrac{5}{2}$

(2) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x < \left(\dfrac{1}{27}\right)^{x+2}$

—解答例—

$\left(\dfrac{1}{3}\right)^x < \left(\dfrac{1}{3}\right)^{3(x+2)}$

$\therefore x > 3(x+2)$

$\therefore -6 > 2x$

$\therefore x < -3$

(3) $9^x - 4 \cdot 3^{x+1} + 27 \leqq 0$

—解答例—

$(3^x)^2 - 12 \cdot 3^x + 27 \leqq 0$

$(3^x - 3)(3^x - 9) \leqq 0$

$\therefore 3 \leqq 3^x \leqq 3^2$

$\therefore 1 \leqq x \leqq 2$

(4) $4^x - 2^x - 2 > 0$

—解答例—

$(2^x)^2 - 2^x - 2 > 0$

$(2^x + 1)(2^x - 2) > 0$

$2^x + 1 > 0$ ゆえ $2^x > 2$

$\therefore x > 1$

指数・対数演習　No3　対数の計算

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ 次の値を求めよ。

(1) $\log_3 \dfrac{1}{3} = \boxed{-1}$　　(2) $\log_2 \dfrac{1}{\sqrt{32}} = \boxed{-5}$

$\boxed{2}$ 次の式を簡単にせよ。

(1) $\log_2 \dfrac{4}{3} + \log_2 75$

—解答例—

与式

$= \log_2 4 - \log_2 3 + \log_2 3 \cdot 5^2$

$= 2 - \log_2 3 + \log_2 3 + 2\log_2 5$

$= 2 + 2\log_2 5$

(2) $\log_2 24 - \log_2 27 + 2\log_2 6$

—解答例—

与式

$= \log_2 3 \cdot 2^3 - \log_2 3^3 + 2\log_2 2 \cdot 3$

$= \log_2 3 + 3 - 3\log_2 3 + 2 + 2\log_2 3$

$= 5$

(3) $\dfrac{1}{2}\log_2 \dfrac{7}{48} + \log_2 12 - \log_2 \sqrt{42}$

—解答例—

与式 $= \dfrac{1}{2}(\log_2 7 - \log_2 2^4 \cdot 3) + \log_2 2^2 \cdot 3 - \dfrac{1}{2}\log_2 2 \cdot 3 \cdot 7$

$= \dfrac{1}{2}\log_2 7 - 2 - \dfrac{1}{2}\log_2 3 + 2 + \log_2 3 - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\log_2 3 - \dfrac{1}{2}\log_2 7$

$= -\dfrac{1}{2}$

(4) $\log_2 3 + \log_4 \dfrac{8}{9}$

—解答例—

与式 $= \log_2 3 + \dfrac{\log_2 \frac{8}{9}}{\log_2 4}$

$= \log_2 3 + \dfrac{\log_2 2^3 - \log_2 3^2}{\log_2 2^2}$

$= \log_2 3 + \dfrac{3 - 2\log_2 3}{2} = \dfrac{3}{2}$

(5) $\log_3 2 \cdot \log_4 27$

—解答例—

与式 $= \log_3 2 \cdot \dfrac{\log_2 3^3}{\log_2 2^2}$

$= \log_3 2 \cdot \dfrac{3}{2}\log_2 3 = \dfrac{3}{2}$

(6) $\log_3 8(\log_2 9 + \log_8 27)$

—解答例—

与式

$= \log_3 2^3 \left(\log_2 3^2 + \dfrac{\log_2 3^3}{\log_2 2^3}\right)$

$= 3\log_3 2\left(2\log_2 3 + \dfrac{3}{3}\log_2 3\right)$

$= 9\log_3 2 \cdot \log_2 3 = 9$

(7) $\log_2 \sqrt{10} - \log_4 45 + \log_8 27$

—解答例—

与式 $= \dfrac{1}{2}\log_2 2 \cdot 5$

$- \dfrac{\log_2 3^2 \cdot 5}{\log_2 2^2} + \dfrac{\log_2 3^3}{\log_2 2^3}$

$= \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\log_2 5$

$- \dfrac{1}{2}(2\log_2 3 + \log_2 5)$

$+ \dfrac{3}{3}\log_2 3 = \dfrac{1}{2}$

$\boxed{3}$ $\log_{10} 2 = a$, $\log_{10} 3 = b$ とするとき、次の式を a , b で表せ。

(1) $\log_{10} 36$

—解答例—

与式 $= \log_{10}(2 \cdot 3)^2$

$= 2(\log_{10} 2 + \log_{10} 3)$

$= 2(a + b)$

(2) $\log_{10} \sqrt[3]{18}$

—解答例—

与式 $= \dfrac{1}{3}\log_{10}(2 \cdot 3^2)$

$= \dfrac{1}{3}(\log_{10} 2 + 2\log_{10} 3)$

$= \dfrac{1}{3}(a + 2b)$

(3) $\log_{10} 45$

—解答例—

与式 $= \log_{10}(3^2 \cdot 5)$

$= 2\log_{10} 3 + \log_{10} \dfrac{10}{2}$

$= 2b + 1 - a$

$= -a + 2b + 1$

(4) $\log_{10} 0.06$

—解答例—

与式 $= \log_{10} \dfrac{2 \cdot 3}{100}$

$= \log_{10} 2 + \log_{10} 3 - 2$

$= a + b - 2$

(5) $\log_4 27$

—解答例—

与式 $= \dfrac{\log_{10} 3^3}{\log_{10} 2^2}$

$= \dfrac{3\log_{10} 3}{2\log_{10} 2} = \dfrac{3b}{2a}$

(6) $\log_5 3$

—解答例—

与式 $= \dfrac{\log_{10} 3}{\log_{10} 5}$

$= \dfrac{b}{\log_{10} \frac{10}{2}} = \dfrac{b}{1 - a}$

$\boxed{4}$ 次の $\boxed{}$ をうめよ。

(1) $\log_a b = \dfrac{1}{\boxed{\log_b a}}$　　(2) $\log_4 3 = \log_{16} \boxed{9}$

(3) $2^{\log_2 3} = \boxed{3}$　　(4) $10^{2\log_{10} 3} = \boxed{9}$

(5) $4^{\log_2 5} = \boxed{25}$

$\boxed{5}$ $\log_5 2 = a$ とするとき、$\log_{25} 64$ を a で表せ。

—解答例—

$\log_{25} 64 = \dfrac{\log_5 2^6}{\log_5 5^2} = \dfrac{6}{2}\log_5 2 = 3a$

$\boxed{6}$ $2^x = 6^y = 81$ のとき、$\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y}$ の値を求めよ。

—解答例—

$x = \log_2 81 \therefore \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{\log_2 81} = \log_{81} 2$

$y = \log_6 81 \therefore \dfrac{1}{y} = \log_{81} 6$

$\therefore \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = \log_{81} 2 - \log_{81} 6 = \log_{81} \dfrac{2}{6}$

$= -\log_{81} 3 = -\dfrac{1}{\log_3 3^4} = -\dfrac{1}{4}$

$\boxed{7}$ $2^x = 3^y = 6^z$ $(xyz \neq 0)$ のとき、$\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{z}$ が成り立つことを示せ。

—解答例—

$2^x = 6^z$, $3^y = 6^z$ ゆえ $x = \log_2 6^z = z\log_2 6$, $y = \log_3 6^z = z\log_3 6$

$x, y, z \neq 0$ ゆえ、$\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{z\log_2 6} = \dfrac{\log_6 2}{z}$, $\dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{z\log_3 6} = \dfrac{\log_6 3}{z}$

$\therefore \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{\log_6 2}{z} + \dfrac{\log_6 3}{z} = \dfrac{\log_6 6}{z} = \dfrac{1}{z}$

指数・対数演習　No4　対数方程式・不等式

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

$\boxed{1}$ 次の方程式を解け。

(1) $\log_9 x = \dfrac{5}{2}$

—解答例—

$x = 9^{\frac{5}{2}} = (3^2)^{\frac{5}{2}} = 3^5 = 243$

(2) $\log_2 x^2 = 4$

—解答例—

$x^2 = 2^4 = 4^2$

$\therefore x = \pm 4$

(3) $2^x = 3$

—解答例—

$x = \log_2 3$

(4) $2^{\log_2 x} = 5$

—解答例—

$2^{\log_2 x} = x$ ゆえ $x = 5$

$\boxed{2}$ 次の方程式を解け。

(1) $\log_{10}(x+1) + \log_{10}(2-x) = \log_{10} x$

—解答例—

真数条件から $x+1>0,\ 2-x>0,\ x>0 \therefore 0<x<2 \cdots ①$

このとき $\log_{10}(x+1)(2-x) = \log_{10} x \therefore (x+1)(2-x) = x$

展開整理すると $x^2 - 2 = 0$ ゆえ $x = \pm\sqrt{2}$

① から $x = \sqrt{2}$

(2) $\log_2 x + \log_2(x-2) = 3$

—解答例—

真数条件より $x>0,\ x-2>0 \therefore 2<x \cdots ①$

このとき $\log_2 x(x-2) = 3 \therefore x(x-2) = 2^3 = 8$

整理すると $x^2 - 2x - 8 = (x+2)(x-4) = 0 \therefore x = -2, 4$

① より $x = 4$

(3) $\log_2(x-7) = \log_4(x+1) + 1$

—解答例—

真数条件より $x-7>0,\ x+1>0 \therefore x>7 \cdots ①$

このとき $\log_2(x-7) = \dfrac{\log_2(x+1)}{\log_2 4} + 1 = \dfrac{1}{2}\log_2(x+1) + 1$

$\therefore 2\log_2(x-7) = \log_2(x+1) + 2 = \log_2(x+1) + \log_2 2^2$

$\therefore (x-7)^2 = 4(x+1)$

整理して $x^2 - 18x + 45 = (x-3)(x-15) = 0 \therefore x = 3{,}15$

① より $x = 15$

(4) $(\log_3 x)^2 - \log_3 x^2 - 3 = 0$

—解答例—

$(\log_3 x)^2 - 2(\log_3 x) - 3 = 0$

$\therefore (\log_3 x + 1)(\log_3 x - 3) = 0$

$\therefore \log_3 x = -1, 3$

$\therefore x = 3^{-1}, 3^3$

$\therefore x = \dfrac{1}{3}, 27$

(5) $\log_x 9 - \log_3 x = 1$

—解答例—

$x>0,\ x \neq 1 \cdots ①$ である。

このとき $\dfrac{\log_3 3^2}{\log_3 x} - \log_3 x = 1$

分母を払って $2 - (\log_3 x)^2 = \log_3 x$

$\therefore (\log_3 x)^2 + (\log_3 x) - 2 = (\log_3 x - 1)(\log_3 x + 2) = 0$

$\therefore \log_x = 1, -2$

$\therefore x = 3, 3^{-2}$

$\therefore x = 3, \dfrac{1}{9}$

$\boxed{3}$ 次の不等式を解け。

(1) $\log_3(x+5) < 2$

—解答例—

真数条件から $x+5>0 \cdots ①$

$\log_3(x+5) < \log_3 3^2$

底 $3>1$ ゆえ

$x+5<9 \therefore x<4$

① から $-5<x<4$

(2) $\log_{\frac{1}{2}} x > 3$

—解答例—

真数条件から $x>0 \cdots ①$

$\log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{2}} \left(\dfrac{1}{2}\right)^3$

底 $\dfrac{1}{2} < 1$ ゆえ

$x < \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 = \dfrac{1}{8}$

① から $0<x<\dfrac{1}{8}$

(3) $\log_{10} x + \log_{10}(2x+1) > 1$

—解答例—

真数条件から $x>0 \cdots ①$

このとき

$\log_{10} x(2x+1) > \log_{10} 10$

底 $10>1$ ゆえ $x(2x+1) > 10$

$\therefore 2x^2 + x - 10 > 0$

$\therefore (x-2)(2x+1) > 0$

$\therefore x < -\dfrac{5}{2},\ 2<x$

① より $x>2$

(4) $2\log_{\frac{1}{2}}(3-x) < \log_{\frac{1}{2}}(x-1)$

—解答例—

真数条件より $1<x<3 \cdots ①$

このとき

$\log_{\frac{1}{2}}(3-x)^2 < \log_{\frac{1}{2}}(x-1)$

底 $\dfrac{1}{2} < 1$ ゆえ

$(3-x)^2 > (x-1)$

整理して $x^2 - 7x + 10 > 0$

$(x-2)(x-5) > 0$

$\therefore x<2, 5<x$

① より $1<x<2$

(5) $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) > \log_2 3$

—解答例—

真数条件から $x>-1 \cdots ①$

$\log_{\frac{1}{2}}(x+1) > \dfrac{\log_{\frac{1}{2}} 3}{\log_{\frac{1}{2}} 2} = -\log_{\frac{1}{2}} 3 = \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{3}$

底 $\dfrac{1}{2} < 1$ ゆえ

$x+1 < \dfrac{1}{3}$

① から $-1<x<-\dfrac{2}{3}$

指数·対数演習　No5　対数のグラフ·応用

＿＿組＿＿番　氏名＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

1 次の関数のグラフは $y=\log_2 x$ のグラフをどのように移動したものか。

(1) $y=\log_2 \dfrac{1}{x}$　　x 軸に関して対称移動

(2) $y=\log_{\frac{1}{2}} x$　　x 軸に関して対称移動

(3) $y=\log_2 2x$　　y 軸方向に 1 平行移動

(4) $y=\log_2 \dfrac{x-2}{4}$　　x 軸方向に 2,y 軸方向に -2 平行移動

2 次の関数のグラフと $y=x$ に関して対称なグラフをもつ関数を求めよ。

(1) $y=3^{x-1}$

—解答例—

$x=3^{y-1}$

$\therefore y-1=\log_3 x$

$\therefore y=\log_3 x+1$

(2) $y=2\log_4 x$

—解答例—

$x=2\log_4 y$

$\quad =2\cdot\dfrac{\log_2 y}{\log_2 4}=\log_2 y$

$\therefore y=2^x$

3 次の数の大小を比較せよ。

(1) $\log_2 3$, $\log_2\sqrt{10}$

—解答例—

$3=\sqrt{9}<\sqrt{10}$

底 $2>1$ ゆえ

$\log_2 3<\log_2\sqrt{10}$

(2) $3\log_4 3$, $2\log_2 3$

—解答例—

$3\log_4 3=3\dfrac{\log_2 3}{\log_2 4}=\dfrac{3}{2}\log_2 3$

$\log_2 3>0$ ゆえ

$\dfrac{3}{2}\log_2 3<2\log_2 3$

$\therefore 3\log_4 3<2\log_2 3$

(3) $2\log_{\frac{1}{2}} 5$, $5\log_{\frac{1}{2}} 2$

—解答例—

$2\log_{\frac{1}{2}} 5=\log_{\frac{1}{2}} 25$

$5\log_{\frac{1}{2}} 2=\log_{\frac{1}{2}} 32$

$25<35$, 底 $\dfrac{1}{2}<1$ ゆえ

$2\log_{\frac{1}{2}} 5>5\log_{\frac{1}{2}} 2$

(4) $\log_4 9$, $\log_9 25$, $\dfrac{3}{2}$

—解答例—

$\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{2}\log_4 4$

$\quad=\log_4 8<\log_4 9$

$\dfrac{3}{2}=\dfrac{3}{2}\log_9 9$

$\quad=\log_9 27>\log_9 25$

底 $4>1$, 底 $9>1$ ゆえ

$\log_9 25<\dfrac{3}{2}<\log_4 9$

4 次の $\boxed{}$ をうめよ。

(1) $10\leqq x<100$ のとき、$\boxed{1}\leqq\log_{10}x<\boxed{2}$

(2) $0.001<x<1$ のとき、$\boxed{-3}<\log_{10}x<\boxed{0}$

5 $\log_{10}2=0.3010$, $\log_{10}3=0.4771$ として次の問に答えよ。

(1) 3^{25} は何桁の数か

—解答例—

$\log_{10}3^{25}=25\log_{10}3=25\times0.4771=11.9275$

$\therefore \log_{10}10^{11}<\log_{10}3^{25}<13=\log_{10}10^{12}$

$\therefore 10^{11}<3^{25}<10^{12}$

$\therefore 3^{25}$は 12 桁

(2) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{10}$ は小数第何位に初めて 0 でない数があらわれるか

—解答例—

$\log_{10}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{10}=10\log_{10}2^{-1}=-10\log_{10}2=-3.010$

$\therefore -4<\log_{10}\left(\dfrac{1}{2})\right)^{10}<-3$

$\therefore 10^{-4}<\left(\dfrac{1}{2}\right)^{10}<10^{-3}$

$\therefore 0.0001=\dfrac{1}{10000}<\left(\dfrac{1}{2}\right)^{10}<\dfrac{1}{1000}=0.001$

$\therefore$ 小数第 4 位に初めて 0 でない数があらわれる。

(3) 6^{12} は何桁の数か

—解答例—

$\log_{10}6^{12}=12\log_{10}2\cdot3=12(\log_{10}2+\log_{10}3)$

$\quad=12\times(0.3010+0.4771)=12\times0.7781=9.3372$

$\therefore 9<\log_{10}6^{12}<10$

$10^9<6^{12}<10^{10}$

よって 6^{12} は 10 桁の数である。

6 17^{100} は 124 桁の数である。17^{40} は何桁の数か

—解答例—

$10^{123}<17^{100}<10^{124}$

$\therefore 123<100\log_{10}17<124$

$\therefore 1.23\times40<\log_{10}17^{40}<1.24\times40$

$\therefore 49.2<\log_{10}17^{40}<49.6$

$\therefore 10^{49}<17^{40}<10^{50}$

$\therefore 17^{40}$ は 50 桁の数である。

7 5^n が 10 桁の整数となるときの整数 n を求めよ。ただし、$\log_{10}2=0.3010$ とする

—解答例—

$10^9<5^n<10^{10}$

$\therefore 9<n\log_{10}5<10$

$\log_{10}5=\log_{10}\dfrac{10}{2}=1-\log_{10}2=0.6990$

$\therefore \dfrac{9}{0.699}<n<\dfrac{10}{0.6990}$

$\therefore 12.8<n<14.3$

$\therefore n=13,14$

8 不等式 $\left(\dfrac{16}{5}\right)^n>2^{10}$ を満たす最小の整数 n を求めよ。ただし、$\log_{10}2=0.3010$ とする

—解答例—

$n\log_{10}\dfrac{16}{5}>10\log_{10}2$

$\therefore n\log_{10}\dfrac{32}{10}>10\log_{10}2$

$\therefore n(5\log_{10}2-1)>10\log_{10}2$

$\therefore (1.505-1)n>3.010$

$\therefore n>\dfrac{3.01}{0.505}=\dfrac{3010}{505}=5.9\cdots$

n は最小の整数ゆえ $n=6$